



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교육학박사학위논문

도형 패턴 학습 환경을 통한
패턴 일반화 과정에 관한 연구

-안구 운동 추적을 활용한 분석과
마이크로월드를 중심으로-

2020년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

최 인 용

도형 패턴 학습 환경을 통한 패턴 일반화 과정에 관한 연구

-안구 운동 추적을 활용한 분석과

마이크로월드 중심으로-

지도교수 조 한 혁

이 논문을 교육학박사 학위논문으로 제출함

2019년 11월

서울대학교 대학원

수학교육과

최 인 용

최인용의 박사 학위논문을 인준함

2019년 12월

위 원 장 _____ (인)

부 위 원 장 _____ (인)

위 원 _____ (인)

위 원 _____ (인)

위 원 _____ (인)

국문초록

도형 패턴 학습 환경을 통한 패턴 일반화 과정에 관한 연구

-안구 운동 추적을 활용한 분석과 마이크로월드를 중심으로-

도형 패턴의 일반화는 물리적 구조를 이용하여 대수적 표현을 구하고 정당화할 때 대수적으로 의미 있는 활동이 될 수 있다. 그러나 학생들에게 패턴에서 대수적으로 유용한 구조를 발견하는 것은 쉽지 않은 일이며, 학생들은 패턴을 수열로 변환한 뒤 수치적 규칙을 찾는 구조가 배제된 패턴 발견 활동에 집중하는 경향이 있다. 대부분의 선행연구는 학생들의 일반화 결과를 토대로 해결 전략의 유형이나 옳고 그름에 관한 문제를 주로 다루었을 뿐 일반화 과정 자체에 초점을 둔 연구는 상대적으로 부족하다. 따라서 학생들이 도형적 추론을 통해 패턴을 일반화하는 과정에 대해 자세히 분석할 필요성이 제기되며 과정에서 겪는 어려움의 유형 및 원인, 학습 지원 방안에 관한 연구도 필요하다. 이에 본 연구에서는 중상위권 중학교 3학년을 대상으로 도형 패턴 일반화에 관한 두 가지 연구를 수행하였다.

첫 번째 연구에서는 일반적인 지필 환경 기반의 패턴 일반화 과정에서 학생들의 일반화를 위한 행동과 시각적 주의를 분석하였으며, 학생들이 겪는 어려움의 유형과 원인에 대해 분석하였다. 두 번째 연구에서는 마이크로월드를 활용하여 패턴 일반화의 학습을 지원하고자 했던 구성주의(constructionism) 기반의 선행연구와 첫 번째 연구의 결과를 바탕으로 거북 표현식 기반의 마이크로월드를 설계하고, 설계된 마이크로월드에서 학생들의 일반화 과정을 분석하였다. 연구방법에 있어서는 일반화 과정에서 학생들의 행동과 상호작용을 자세히 분석하기 위하여 안구 운동 자

료와 회상자극면담 내용, 필기 등의 전통적인 자료를 상호보완적으로 분석하였다.

첫 번째 연구결과, 학생들이 가추-귀납 단계의 순환을 통해 패턴을 일반화하는 과정에서 수행하는 10가지 행동을 분류하였다. 각 행동의 특성을 분석하였으며 행동들 사이의 상호작용과 가추-귀납 단계에서 각 행동의 역할을 확인하였다. 특히, 패턴의 공간적 분할, 단계 중심의 산술적 관계 검색, 단계 사이의 변화 검색, 패턴 내 요소 사이의 대응은 가추 단계와 귀납 단계 모두에서 중요한 역할을 하는 행동으로 확인되었다. 행동들은 서로 밀접하게 연관되어 상호작용하였으며 동시에 나타나기도 하였다. 4단계를 그리는 문항에서는 단계 사이의 전환이 상대적으로 많이 나타났으며 7단계를 구하는 문항에서 대부분의 학생들이 함수적 관계를 찾고 일반화하였기 때문에 반응시간이 가장 길었다. 학생들은 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서는 1단계를, 닳은꼴로 성장하는 패턴에서는 2, 3단계를 많이 응시하였으며 패턴을 일반화하는 과정에서 쓰기 영역과 단계 영역 사이의 지속적인 주의 전환이 나타났다. 학생들이 겪는 어려움의 주요 원인은 패턴의 물리적 구조에 대한 부정확한 지각, 일관성 없는 패턴 분할의 사용, 포함-배제 원리 도식의 부재, 패턴과 단절된 규칙의 확장, 변수 개념에 대한 이해 부족, 귀납적 검증의 미실행으로 확인할 수 있었다.

두 번째 연구결과, 거북 은유는 패턴을 분할하고 분할에 대한 관점을 일정하게 유지하는 데 도움을 주었으며 거북 표현은 추상적인 일반화 과정을 구체화함으로써 일반화 절차의 안정적 수행을 지원하였다. 마이크로월드의 시각적 피드백은 학생들이 자신의 일반화를 귀납적으로 점검하고 오류가 있는 경우 규칙을 수정할 수 있는 반성의 기회를 제공하였다. 학생들은 마이크로월드에서의 활동이 내면화되면서 외부적 실행 없이 거북 표현식의 조작과 내적 실행을 통해 가추-귀납적 일반화 과정을 수행할 수 있게 되었다. 즉, 마이크로월드는 대수적으로 의미 있는 일반화 과정을 매개하였다. 이에 연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 낮았던 4명 중 3명이 마이크로월드에서의 수업을 통해 도형 패턴을 의미 있는 방

식으로 일반화할 수 있었다. 그러나 변수에 대한 이해가 부족하고 거북 표현식을 충분히 학습하지 못했던 1명의 학생은 마이크로월드에서도 지필 환경과 유사한 시행착오적 추측과 확인 전략을 사용하였다.

두 가지 연구로부터 도형 패턴의 일반화는 다양한 형태의 행동을 통해 이루어지는 가추-귀납 단계의 순환 과정으로 설명될 수 있음을 확인하였다. 일반화를 위한 행동의 분류는 연구자와 교사에게 학생의 일반화 과정을 구체적으로 분석할 수 있는 이론적 틀로 활용될 수 있다. 대수적 사고를 촉진하는 패턴 활동을 설계하기 위해서는 일반화 과정의 가추-귀납적 특성과 함께 함수적 관계의 가추와 귀납에 핵심적인 역할을 하는 행동에 대한 고려가 필요하다.

도형 패턴의 일반화에 있어서 선행연구에서 강조하였던 ‘대수적으로 유용한 구조의 인식’ 즉, 패턴을 대수적으로 유용하게 분할하는 안목만큼 중요한 것은 패턴의 분할 기준을 일반화 과정에서 일정하게 유지하는 능력이다. 패턴의 분할에 대한 기준을 일정하게 유지하고 있어야만 일반화를 위해 시도되는 다른 행동들이 유의미하게 작동할 수 있기 때문이다. 실제로 많은 오류가 잘못된 분할의 참조에서 기인하였다.

패턴의 물리적 구조를 나타낼 수 있는 표현의 사용은 학습자가 자신의 생각을 의식화시키고 분석하게 함으로써 구조에 대한 일반화 활동을 지원한다. 연구 1과 연구 2에서 각각 그림, 거북 표현식이 학생들의 내적 일반화 과정과 연결된 외적 표현으로서 기능하였다. 특히 거북 표현식은 구조를 생성하는 동적인 표현으로써 패턴의 일반화를 더욱 강력히 지원하였다. 새로운 표현과 상호작용의 설계를 통해 학생들에게 학습할만한 수학을 제공하기 위한 다양한 연구가 수행될 필요가 있다.

안구 운동 자료는 학습자의 사고를 자세히 들여다볼 수 있는 새로운 창이라 할 수 있다. 시선 흐름 영상은 학습자가 자신의 일반화 과정을 정밀하게 회상할 수 있도록 돕는 유용한 자극이었다. 안구 운동 자료와 회상자극면담과 같은 자기보고 자료의 상호보완적 분석을 통해 학생의 일반화 과정을 자세히 관찰할 수 있었다. 이러한 안구 운동 자료의 질적 분석 방법을 다양한 영역에 적용한다면 학생들의 수학적 인지 과정에 대

한 새로운 관점의 논의를 끌어낼 수 있을 것으로 기대된다.

주요어: 대수, 도형 패턴, 일반화, 거북 표현식, 안구 운동, 마이크로월드

학번: 2014-31198

목 차

국문 초록	i
목차	v
표 목차	x
그림 목차	xii
 I. 서론	 1
1. 연구의 목적 및 필요성	1
2. 연구 문제 및 내용	5
3. 용어 정의	8
 II. 패턴 일반화에 관한 선행연구	 10
1. 패턴 일반화	10
1.1. 일반화	12
1.2. 패턴 일반화	14
1.3. 도형 패턴의 일반화와 대수적 사고	16
2. 패턴 일반화 과제의 설계	22
2.1. 도형 패턴의 유형	22
2.1.1. 반복패턴과 성장패턴	22
2.1.2. 일반식의 형태에 따른 분류	23
2.1.3. 구조적 특성에 기반한 선형 패턴의 분류	26
2.2. 도형 패턴 과제의 구성	32
2.2.1. 사례로 제시되는 단계의 수	32
2.2.2. 질문의 유형 및 순서	33
3. 도형 패턴의 일반화 과정	37
3.1. 시각적 추론	37
3.2. 패턴 일반화와 가추, 귀납	44
3.3. 일반화 행동	48
4. 학생들의 패턴 일반화에 관한 선행연구	54

4.1. 패턴 일반화 전략	54
4.1.1. 일반화 전략의 유형	54
4.1.2. 학생들의 전략 선택	60
4.2. 패턴 일반화의 어려움	63
4.2.1. 중학생의 패턴 일반화 수행 정도	63
4.2.2. 어려움의 원인	64
5. 패턴 일반화를 지원하는 마이크로월드	68
5.1. Constructionism과 패턴 일반화	68
5.2. 3D 거북 표현식과 패턴 일반화	72
 III. 안구 운동 추적을 활용한 수학교육 연구	76
1. 안구 운동과 주의	76
1.1. 안구 운동의 정의와 유형	77
1.2. 안구 운동과 주의	78
2. 안구 운동과 수학적 인지	81
2.1. 안구 운동을 이용한 수학적 인지 처리 과정의 추론	83
2.2. 수학적 문제해결에서 안구 운동 지표의 해석	87
 IV. 연구 1: 패턴 일반화의 과정과 어려움	90
1. 연구방법	90
1.1. 연구 참여자	90
1.2. 연구 절차	90
1.3. 검사 도구	92
1.3.1. 과제	92
1.3.2. 필기 입력이 가능한 자극 제시 시스템	96
1.4. 자료 수집 및 분석 방법	96
1.4.1. 아이트래커	96
1.4.2. 자료 수집	97
1.4.3. 양적 분석	100

1.4.4. 질적 분석	102
2. 패턴 일반화 수행 내용	106
2.1. 일반화 수행 정도	106
2.2. 일반화 전략	107
2.3. 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결	110
3. 일반화를 위한 행동	113
3.1. 패턴의 공간적 분할	113
3.2. 단계 사이의 변화 검색	119
3.3. 단계 중심의 산술적 관계 검색	123
3.4. 패턴 내 요소 사이의 대응	128
3.5. 이전 문제와의 관계	130
3.6. 패턴의 확장	132
3.7. 패턴을 그리는 방법의 확장	135
3.8. 식의 확장	136
3.9. 식의 값 검색	137
3.10. 재귀적 수치의 확장	139
3.11. 행동의 특성	140
4. 시각적 주의	143
4.1. 안구 운동 지표	143
4.1.1. 반응시간	143
4.1.2. AOI별 응시시간과 응시율	144
4.1.3. AOI 사이의 전환횟수	146
4.2. 시각적 주의와 내적 처리 과정	149
5. 오류의 유형과 원인	153
5.1. 근 일반화 문항에서의 오류 사례	153
5.1.1. 재귀적 관계의 이해에서의 오류	153
5.1.2. 함수적 관계의 이해에서의 오류	155
5.1.3. 패턴을 그리는 절차상의 오류	156
5.2. 원 일반화 문항에서의 오류 사례	157

5.2.1. 함수적 관계의 이해에서의 오류	157
5.2.2. 수치 중심적 과정에서의 오류	158
5.2.3. 패턴을 그리는 방법의 확장에 의한 오류	160
5.2.4. 산술적으로 표현하는 과정에서의 오류	161
5.3. 기호적 일반화 과정에서의 오류 사례	164
5.3.1. 함수적 관계의 이해에서의 오류	164
5.3.2. 식의 확장에 의한 오류	165
5.3.3. 일반성의 표현에서의 오류	166
5.3.4. 변환 과정에서의 오류	167
5.4. 오류의 경로 및 원인	168
6. 요약 및 논의	172
6.1. 패턴 일반화 수행 내용	172
6.2. 패턴을 일반화하기 위한 행동	174
6.3. 시각적 주의의 특성	181
6.4. 오류의 유형 및 원인	183
V. 연구 2: 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습	186
1. 연구방법	186
1.1. 연구 참여자	186
1.2. 연구 절차	188
1.3. 거북 표현식 기반의 마이크로월드	189
1.4. 공통수업	194
1.5. 본 실험	197
1.6. 자료 수집 및 분석 방법	200
1.6.1. 아이트래커	200
1.6.2. 자료 수집 및 분석 방법	200
2. 연구 결과	202
2.1. 공통수업에서 학생들의 수행 정도	202
2.1.1. 형성평가 수행 정도	202

2.1.2. 거북 표현식의 학습 과정에서 나타난 어려움	203
2.2. exPattern에서의 패턴 일반화 과정	204
2.2.1. 패턴을 거북 표현식으로 나타내는 과정	204
2.2.2. 거북 표현식을 완성한 후 일반식을 구하는 과정	220
2.3. 연구 참여자의 변화	224
3. 요약 및 논의	229
 VI. 결론	 235
1. 요약	235
1.1. 연구 1	236
1.2. 연구 2	241
2. 결론 및 제언	244
 참고문헌	 251
부 록	273
Abstract	275

표 목 차

〈표 I-1〉 연구의 구성 및 방법	7
〈표 II-1〉 패턴 일반화의 층(Radford, 2010)	15
〈표 II-2〉 구조적 특성에 따른 선형 패턴의 유형 분류	31
〈표 II-3〉 패턴 일반화 과제에 예(Jurdak & El Mouhayar, 2014)	34
〈표 II-4〉 패턴 일반화에서 도형적 추론을 돕기 위한 발문(Friel & Markworth, 2009, p. 28.)	35
〈표 II-5〉 패턴의 구조가 해석되는 유형에 따른 패턴 일반화의 분류 (Rivera, 2011)	43
〈표 II-6〉 일반화 행동의 범주(Ellis, 2007, p. 235)	49
〈표 II-7〉 학생들이 도형 패턴을 분석하고 확장하는 과정(Billings et al., 2007)	64
〈표 IV-1〉 연구 1의 연구 절차	91
〈표 IV-2〉 과제에서 사용된 도형 패턴	93
〈표 IV-3〉 실험에서 사용된 패턴의 구조적 특성	95
〈표 IV-4〉 질적 분석을 위한 회상자극면담 자료의 정리 양식	103
〈표 IV-5〉 개인별, 문항별 정확도	106
〈표 IV-6〉 문항별 일반화 전략	109
〈표 IV-7〉 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결	111
〈표 IV-8〉 반응시간(초)	143
〈표 IV-9〉 문항별 AOI의 응시시간과 응시율	144
〈표 IV-10〉 AOI 간 전환횟수	147
〈표 IV-11〉 오류의 유형별 사례 수	168
〈표 IV-12〉 잘못된 일반식이 도출되는 경로의 분류	169
〈표 V-1〉 연구 참여자에 대한 기초 정보	187
〈표 V-2〉 공통수업의 형성평가에서 사용된 패턴	196
〈표 V-3〉 본 실험의 측정에서 사용된 패턴	198
〈표 V-4〉 S5, S9, S10의 형성평가 수행 정도	202

〈표 V-5〉 s9가 활동 10(3)에서 거북 표현식을 작성하는 과정의 일부	210
〈표 V-6〉 s9가 문제4의 단계 거북 표현식을 작성하는 전체 과정212
〈표 V-7〉 연구 2에서 연구 참여자의 패턴 일반화 수행 정도224
〈표 VI-1〉 연구 1에서 확인된 10개의 행동과 범주238

그 립 목 차

[그림 II -1] 도형 패턴의 예	11
[그림 II -2] 성냥개비 패턴의 다양한 해석 방법	20
[그림 II -3] 반복패턴과 성장패턴의 예	23
[그림 II -4] x^2 꼴 패턴(이명기, 나귀수, 2012)	24
[그림 II -5] $ax+b$ 꼴 패턴(이명기, 나귀수, 2012)	24
[그림 II -6] $4x+4$ 꼴의 성장패턴	25
[그림 II -7] x^2 꼴의 이차패턴(Friel & Markworth, 2009)	25
[그림 II -8] 구조가 동형인 성냥개비 패턴과 타일 패턴	26
[그림 II -9] 유형1에 속한 패턴의 예시	27
[그림 II -10] 유형2에 속한 패턴의 예시	27
[그림 II -11] 유형2-1에 속한 패턴의 예시	28
[그림 II -12] 유형3에 속한 패턴의 예시	28
[그림 II -13] 유형4에 속한 패턴의 예시	29
[그림 II -14] 유형4-1에 속한 패턴의 예시	29
[그림 II -15] 유형5에 속한 패턴의 예시	30
[그림 II -16] 유형6에 속한 패턴의 예시	30
[그림 II -17] 성냥개비 이차 패턴(Küchemann, 2010, p. 242)	32
[그림 II -18] 패턴의 공간적 분할에 대한 제스처(Radford et al., 2007, p. 521)	38
[그림 II -19] 도형 패턴 이해의 네 가지 관점(Samson, 2010)	39
[그림 II -20] 인수분해에서 VMS의 사례(Arcavi, 2003, p. 224)	41
[그림 II -21] 시각적 템플릿에 대한 3차원 인지 모델(Rivera, 2010a)	42
[그림 II -22] 선형 패턴 일반화에서의 가추-귀납적 추론 과정(Rivera & Becker, 2007)	47
[그림 II -23] 역T 패턴	55
[그림 II -24] 재귀적 관계의 시각적 인식	58
[그림 II -25] 식에 투영하기 사례	59

[그림 II -26] Mathsticks 마이크로월드(Noss et al., 1997, p. 221)	69
[그림 II -27] eXpresser의 사용자 인터페이스	71
[그림 II -28] 3D 거북 표현식(Cho et al., 2012, p. 566)	72
[그림 II -29] 치환을 이용하는 2가지 방법	73
[그림 II -30] 학생들의 서로 다른 패턴 일반화 표현(Cho et al., 2012, p. 22)	74
[그림 II -31] 변수 n 을 이용한 패턴 만들기	75
[그림 III -1] 목적에 따른 시선의 차이(Yarbus, 1967, p. 167)	78
[그림 III -2] 안구 운동 지표	82
[그림 III -3] 안구 운동 패턴의 4가지 서로 다른 해석(Schindler & Lilienthal, 2019, p. 135.)	83
[그림 IV -1] 4단계와 n 단계 문항의 제시 화면 예시	94
[그림 IV -2] GP3 HD 아이트래커와 11-point 보정 화면	97
[그림 IV -3] 본 실험 설계	97
[그림 IV -4] 본 실험 측정 장면	99
[그림 IV -5] 관심영역(AOI)의 설정	101
[그림 IV -6] 시선 흐름 영상의 재생 장면	102
[그림 IV -7] 안구 운동으로부터 내적 처리 과정을 추론하는 과정	105
[그림 IV -8] s4의 그리기 전략의 변화	110
[그림 IV -9] 패턴과 대수적 표현 사이의 연결의 변화	112
[그림 IV -10] 패턴의 공간적 분할 사례	113
[그림 IV -11] s14가 시도한 3가지 서로 다른 분할 방법	114
[그림 IV -12] 단계의 수를 이용한 패턴의 분할 사례	115
[그림 IV -13] s12의 단계의 수에 의한 분할을 이용한 가추와 귀납	116
[그림 IV -14] 문제4의 기호적 일반화 단계에서 s12의 두 가지 가추	117
[그림 IV -15] s17이 패턴을 확장할 때의 분할과 식을 세울 때의 분할	118
[그림 IV -16] 초기 관찰 과정에서 s1의 안구 운동	120
[그림 IV -17] 초기 관찰 과정에서 s18의 안구 운동	120
[그림 IV -18] 단계 사이의 변화를 검색하는 구체적 행동	121

[그림 IV-19] 변하지 않는 요소를 인식할 때와 그 이후의 s13의 시선	122
[그림 IV-20] s12의 상황적 패턴 확장과 재귀적 검증	123
[그림 IV-21] 산술적 관계의 검색을 통한 가추 사례	124
[그림 IV-22] 산술적 관계의 검색을 통한 s17의 가추와 귀납	125
[그림 IV-23] 산술적 관계의 검색에 의한 s2의 가추와 귀납	126
[그림 IV-24] 산술적 관계의 검색을 통한 귀납	126
[그림 IV-25] 패턴 내 요소 사이의 대응 관련 사례	128
[그림 IV-26] 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용한 패턴의 확장 사례	129
[그림 IV-27] 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용한 귀납적 과정	129
[그림 IV-28] 패턴을 확장하는 과정에서 구조를 가추한 s11의 시선	132
[그림 IV-29] 문제2에서 s11의 가추	133
[그림 IV-30] 패턴을 확장하는 과정에서 규칙을 가추한 s14의 시선	134
[그림 IV-31] 4단계를 그리는 방법을 7단계의 확장에 적용한 사례	135
[그림 IV-32] s4의 식의 확장 사례	136
[그림 IV-33] s10의 식의 확장 사례	137
[그림 IV-34] s7이 식의 값을 확인할 때의 안구 운동	138
[그림 IV-35] 식의 값 검색을 통한 s15의 귀납 사례	138
[그림 IV-36] 재귀적 수치를 활용한 s14의 귀납 사례	139
[그림 IV-37] 재귀적으로 확장한 수치에 패턴을 투영하는 사례	140
[그림 IV-38] 필기할 때 응시의 위치와 문제2에서의 안구 운동	145
[그림 IV-39] s15의 문제2와 문제3에서의 AOI 경로 비교	145
[그림 IV-40] 일반화 과정에서 AOI 사이의 시선 전환 예	148
[그림 IV-41] 눈-마음 가설이 성립하지 않는 사례	149
[그림 IV-42] 재귀적 접근을 한 s9와 s11의 AOI 전환 비교	150
[그림 IV-43] 안구 운동 자료와 맥락 정보만으로 내적 과정의 추론이 가능한 경우와 그렇지 않은 경우	151
[그림 IV-44] s8의 문제1의 근 일반화에서의 안구 운동	153
[그림 IV-45] 재귀적인 관계를 바르게 이해한 경우가 그렇지 않은 경우의 안구 운동 비교	154

[그림 IV-46] 왼쪽 첫 번째 V 부분에만 집중된 s2와 s9의 안구 운동	154
[그림 IV-47] s14의 문제1의 근 일반화에서의 오류	155
[그림 IV-48] 잘못된 분할의 참조로 인한 오류 사례	156
[그림 IV-49] 패턴을 그리는 절차에서의 오류 사례	157
[그림 IV-50] 원 일반화 단계에서 함수적 관계의 이해의 오류 사례	158
[그림 IV-51] s8의 수치 중심적 일반화의 오류 사례	159
[그림 IV-52] s9의 수치 중심적 일반화의 오류 사례	160
[그림 IV-53] 잘못된 규칙을 이용하여 패턴을 확장한 사례	161
[그림 IV-54] 겹치는 부분을 처리하는 과정에서의 오류 사례	162
[그림 IV-55] 패턴의 분할과 관련된 오류 사례	163
[그림 IV-56] 기호적 일반화 단계에서 함수적 관계의 이해 오류 사례	165
[그림 IV-57] 식의 확장, 문자의 의미를 이해하지 못하는 오류 사례	166
[그림 IV-58] s15의 변환 과정에서의 오류 사례	167
[그림 IV-59] 일반화 과정에서 나타나는 행동의 종류와 범주	174
[그림 V-1] 연구2의 연구 절차	188
[그림 V-2] exPattern의 사용자 인터페이스와 화면 구성	189
[그림 V-3] U, D를 사용할 때와 L, R을 사용할 때	190
[그림 V-4] 구조를 표현하는 중간언어로서 거북 표현식	191
[그림 V-5] 공통수업의 진행 과정	195
[그림 V-6] 대괄호의 위치에 따른 차이	195
[그림 V-7] 연구 2의 본 실험의 절차	197
[그림 V-8] 연구 2의 본 실험 장면	199
[그림 V-9] exPattern의 로그 데이터 예시	201
[그림 V-10] s10의 대괄호 사용 사례	204
[그림 V-11] s5가 10(2)에서 패턴을 거북 표현식으로 나타내는 과정	205
[그림 V-12] s5의 거북 표현식의 변화 과정	206
[그림 V-13] 거북의 이동 경로에 따른 패턴의 분할	206
[그림 V-14] s10의 분할과 거북 표현에 의한 분할의 차이	208
[그림 V-15] exPattern에서 거북 표현식을 완성해가는 가추-귀납적 과정	

.....	209
[그림 V -16] 10(3)의 거북 표현식을 작성할 때 s9의 안구 운동	210
[그림 V -17] n 단계 거북 표현식을 실행한 이후의 s10의 안구 운동 ..	211
[그림 V -18] 문제4의 단계 거북 표현식을 작성할 때의 s9의 안구 운동	212
[그림 V -19] s9의 시선 흐름	214
[그림 V -20] 거북 표현식의 적용 범위의 확장	215
[그림 V -21] s8의 패턴 발견하기 활동에서 나타난 4단계의 일부	216
[그림 V -22] s5의 거북 표현식의 확장과 실행	216
[그림 V -23] s5가 다시 패턴을 관찰하게 되는 과정	217
[그림 V -24] 치환을 사용하여 패턴을 생성한 예	218
[그림 V -25] 치환을 사용하는 경우와 사용하지 않는 경우의 안구 운동	219
[그림 V -26] 반복 도입 전과 후의 s9의 거북 표현식의 변화	219
[그림 V -27] 패턴을 보면서 일반식을 구하는 사례	220
[그림 V -28] 거북 표현식을 이용하여 일반식을 구할 때의 시선 흐름	222
[그림 V -29] 연구 1과 연구 2에서 s8가 일반화를 할 때의 안구 운동	223
[그림 V -30] 연구 1과 연구 2에서의 s9의 안구 운동 비교	225
[그림 V -31] 연구 1과 연구 2에서의 s10의 안구 운동 비교	226
[그림 V -32] exPattern에서의 패턴 일반화 과정	230
[그림 VI -1] 논문의 전체적인 구조	236

I. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

수학은 패턴의 과학이다(Resnik, 1997; Steen, 1988). 패턴의 탐구는 모든 수학 분야, 실제로 모든 과학 분야에서 중추적인 활동이며(Lee & Freiman, 2006. p. 428), 패턴을 인식하고 일반화하는 것은 일상생활에서도 사용되는 중요한 수학적 사고이다.

패턴은 다양한 수학적 주제와 통합될 수 있지만(NCTM, 2000; Zazkis & Liljedahk, 2002), 학교 수학에서는 주로 대수적 사고의 신장과 관련하여 다루어지고 있다. 패턴은 대수의 본질인 일반화(Blanton & Kaput, 2005; Lee, 1996; Mason, 1996) 활동의 출발점으로 의의가 있으며 특히 도형 패턴의 일반화는 대수적 사고를 촉진하는 강력한 도구로 알려져 있다(English & Warren, 1998; Radford, 2008). 도형 패턴은 일반성의 표현(김성준, 2003; Mason, 1996; Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2005), 함수적 사고(Warren & Cooper, 2006; Markworth, 2010; Moss & McNab, 2011), 변수 개념(지영명, 유연주, 2014; English & Warren, 1998; Mason, 1996; Warren & Cooper, 2008), 대수적 표현의 동치 개념(Warren & Cooper, 2008; Watson & Mason, 2006), 비형식적 정당화(최수미, 정영옥, 2010, Lannin, 2005)의 학습에서 활용될 수 있다. 실제로 캐나다의 온타리오주(Ontario Ministry of Education, 2005)나 호주(Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority[ACARA], 2015)에서는 패턴을 기반으로 하는 대수 교육과정을 저학년부터 고학년까지 하나의 독립된 영역으로 편성하고 있다.

그러나 학생들에게 도형 패턴 일반화는 쉽지 않은 과제이다. TIMSS 2007의 대수 영역 성향개비 패턴 문항에서 우리나라 중학생의 정답률은 44.3%로 국제 평균(8.6%)보다는 유의하게 높았지만, 절반 이상의 학생이 선형 패턴을 일반화하는 데 어려움을 겪었다(김선희, 김경희, 2009). 또한

도형 패턴의 일반화는 패턴의 물리적 구조를 이용하여 일반식을 구하고 정당화하는 활동이 될 때 대수적 사고를 촉진할 수 있지만(Lannin, 2005; Radford, 2014; Rivera, 2010a; Steele, 2008), 학생들에게 도형을 그냥 보는 것(seeing a pattern)이 아닌 대수적으로 유용한 구조(algebraically useful pattern)를 인식하는 것은 쉽지 않은 일이다(김성준, 2003; Lee, 1996; Rivera & Becker, 2011). 학생들은 도형 패턴을 수열이나 표로 변환한 뒤 재귀적 관계에 집착하거나 구조가 배제된 규칙 발견하기 활동에 집중하면서 어려움을 겪는 경우가 많다(Becker & Rivera, 2005; English & Warren, 1998; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Stacy, 1989; Steele & Johanning, 2004). 따라서 도형 패턴을 활용한 대수적 사고의 개발에는 과제와 수업의 정교한 설계가 뒷받침되어야 하며, 이를 위해서는 학생들의 일반화 결과가 아닌 일반화 과정에 대한 상세한 분석이 필요하다. 그러나 많은 선행연구는 “○단계는 몇 개인가?”라는 질문의 과제에서 학생들의 패턴 일반화 수행 정도나 일반화 전략의 옳고 그름이나 유형을 분석하는 데 집중하였다(e.g. 이명기, 나귀수, 2012; Becker & Rivera, 2005; Bishop, 2000; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Lannin, 2003; Lannin, Barker, & Townsend, 2006a; Stacey, 1989). 일부 연구들이 도형적 추론에 초점을 두었으나 학생이 패턴의 물리적 구조를 대수적 표현과 연결하는 방식에 대해 집중하였을 뿐(Chua & Hoyles, 2010; Rivera, 2010a; Rivera & Becker, 2008; Samson, 2010; Wilkie & Clarke, 2016), 학생들이 도형 패턴을 일반화하는 과정에서 수행하는 다양한 시도는 무엇이며, 그러한 시도가 어떻게 일반화와 연결되는지에 대한 연구는 충분히 이루어지지 않았다. 어려움에 있어서도 상술한 바와 같이 대수적으로 유용한 구조의 인식에 관한 문제나 수치적·재귀적 접근으로 인한 어려움에 대한 분석이 주로 이루어졌을 뿐 학생이 도형적 추론을 바탕으로 하는 일반화 과정에서 겪는 구체적인 어려움에 관해 분석한 연구는 부족하다.

이상의 논의로부터 본 연구는 도형적 추론에 기반한 패턴 일반화 과정에서의 행동과 어려움에 초점을 둔다. 행위자 중심의 관점(Lobato, 2003)을 확장하여 일차함수에 관한 실생활 문제에서의 학생들의 일반화 행동

을 분류한 Ellis(2007)의 연구를 바탕으로 학생들이 도형 패턴을 일반화하기 위하여 시도하는 다양한 행동들을 분석하고 일반화 과정에서 겪는 어려움의 유형과 원인을 분석하고자 한다.

한편, 일부 구성주의(constructionism) 연구자들은 지필 환경 기반의 패턴 활동에서 학생들이 겪는 어려움에 대한 대안으로 대수적 사고의 개발을 지원하는 마이크로월드¹⁾를 설계하고 그 잠재성에 대해 분석하는 연구를 수행해왔다(Mavrikis, Noss, Hoyles, & Geraniou, 2012; Noss, Healy, & Hoyles, 1997; Noss et al., 2009). 마이크로월드는 지필 환경에서 할 수 없는 일반화에 관한 사고 실험을 가능하게 하였으며 시각적 피드백을 통해 학생들이 자신의 일반화에 대해 반성할 수 있도록 주의를 유도하였다(Mavrikis et al., 2012). 특히 마이크로월드에서 제공하는 제한된 표현체계를 통한 패턴 만들기 활동은 학생들이 수치적인 재귀적 관계보다는 패턴을 구성하는 도형 사이의 함수적 관계를 인식할 수 있도록 유도하였다(Noss et al., 1997; Noss et al., 2009).

거북 표현식(Cho, Song, Lee, & Kim, 2010)은 신체-동조적으로 이동하는 거북이의 경로를 따라 패턴을 구성할 수 있으며 공간적 구조와 수량적 구조를 모두 표현할 수 있다. 또한 선행연구(Noss et al., 1997; Noss et al., 2009)에서 사용되었던 프로그래밍 코드나 도상적 표현보다 대수적 표현과의 연결성이 좋고 의사소통에 용이한 비형식적 문자표현이다. 일부 선행연구를 통해 거북 표현식이 반복, 치환, 변수와 함께 사용되었을 때 패턴 일반화의 지도에 있어서 잠재성이 있음을 보고하였다(Cho, Lee, & Song, 2012; Cho, Jeong, Kim, Seo, & Lee, 2016). 그러나 거북 표현식 기반의 마이크로월드와 학생의 상호작용을 관찰하고 거북 표현식을 이용한 패턴 만들기 활동이 어떻게 패턴 일반화 역량 및 대수적 사고의 개발과 연결될 수 있는지 분석한 연구는 수행되지 않았다.

Hoyles, Noss, & Kent(2004)는 마이크로월드의 설계와 개발에 있어서

1) 마이크로월드는 Logo의 출현과 함께 등장한 용어로 적절한 과제와 교육 체계가 있을 때, 학생들이 풍부한 의미를 창출해내는 탐구 및 구성 활동에 참여할 수 있도록 디자인된 일련의 과학적 개념과 관계를 포함하는 컴퓨터 환경을 지칭한다(Clements & Sarama, 2002).

학생과 마이크로월드의 상호작용이 교실 환경에서의 사회수학적 규범을 형성하는 데 중요한 역할을 하기 때문에 개인적 차원에서 학생이 마이크로월드와 상호작용하는 동안에 개발하는 수학적 지식의 종류에 대해 자세히 분석할 필요가 있다고 주장한 바 있다. 이에 본 연구에서는 선행연구 분석을 바탕으로 거북 표현식 기반의 마이크로월드를 설계하고 패턴 일반화 과정에서 학생과 마이크로월드 사이의 상호작용을 분석함으로써 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습의 가능성을 탐색하고자 하였다.

본 연구에서는 일반화 결과보다는 과정을 분석하기 위해서 신경생리학적 자료인 안구 운동 자료를 분석하였다. 선행연구는 주로 필기, 영상 분석, 사후면담 등을 이용하여 학생들의 일반화를 조사하였다. 그러나 이러한 자기보고 자료에 의한 분석은 사후 결과물이나 외부에 명시적으로 표현되어 관찰 가능한 정보만을 바탕으로 학습자 내부의 인지 과정을 추측해야 한다는 한계가 있으며(신동훈, 최현동, 2013; Susac, Bubic, Kaponja, Planinic, & Palmovic, 2014), 자료의 시간 해상도가 낮아 수시로 변화하는 학습자의 사고 과정을 분석하기 어렵다(최인용, 조한혁, 2016, 2017). 아이트래커를 이용하여 측정한 안구 운동 자료는 자기보고식 자료와 함께 상호보완적으로 분석되었을 경우 학생들의 수학적 인지 과정을 보다 객관적으로 추론할 수 있도록 한다(이미진, 이광호, 2015; 이슬, 장혜원, 2018; 조한혁, 최인용, 2016, 2017; Andr  et al., 2015; Lin & Lin, 2014; Schindler & Lilienthal, 2019; Susac et al., 2014). 이에 본 연구에서는 안구 운동 자료의 분석을 통해 학생들의 일반화 처리 과정 및 마이크로월드와의 상호작용을 상세히 살펴보고자 하였다.

2. 연구 문제 및 내용

본 연구는 중학교 3학년 학생들을 대상으로 도형 패턴의 일반화 과정에서 학생들이 시도하는 행동, 학생들의 시각적 주의, 학생들이 일반화 과정에서 겪는 어려움에 대해 분석하고자 하였다. 또한, 패턴 일반화의 학습을 지원하기 위해 설계된 마이크로월드에서 학생의 패턴 일반화 과정을 분석하고자 하였다. 연구 목적에 따라 다음과 같이 두 가지 연구를 설계하였으며 각 연구에 대한 연구 문제를 구체적으로 설정하였다.

연구 1. ‘패턴 일반화의 과정과 어려움’에서는 안구 운동 추적 실험과 회상자극면담을 통해 도형 패턴 과제에서 문자 사용이 가능한 중학생의 일반화를 위해 시도하는 행동과 시각적 주의, 일반화에 실패하는 과정 및 원인에 대해 분석하고자 하였다. 세부적인 연구 문제는 다음과 같다.

연구 문제 1.1 도형 패턴의 일반화 과정에서 중학교 3학년 학생들이 시도하는 행동의 유형과 역할은 어떠한가?

연구 문제 1.2 도형 패턴의 일반화 과정에서 중학교 3학년 학생들의 시각적 주의를 어떠한 특성을 보이는가?

연구 문제 1.3 중학교 3학년 학생들이 일반화에 실패하게 되는 과정은 어떠한가? 또 실패하게 되는 원인은 무엇인가?

연구 2. ‘마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습’에서는 안구 운동 추적 실험과 회상자극면담을 통해 거북 표현식 기반 마이크로월드에서 중학생의 패턴 일반화 과정을 분석함으로써 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습의 가능성에 대해 탐색하고자 하였다. 세부적인 연구 문제는 다음과 같다.

연구 문제 2.1 거북 표현식 기반의 마이크로월드에서 패턴을 일반화할 때, 학생들과 마이크로월드의 상호작용은 어떠한가?

연구 문제 2.2 지필 환경과 비교했을 때, 마이크로월드를 이용한 패턴 일반화에서 학생들은 어떠한 변화를 보이는가?

연구 1에서는 선형 패턴 과제에서 학생들의 일반화를 위한 행동 및 시각적 주의의 특성과 어려움에 대해 분석하였다. 일반화 과정을 상세히 분석하기 위하여 학생들이 펜 태블릿으로 문제를 해결하는 동안 안구 운동을 측정할 수 있는 자극 제시 프로그램을 개발하여 학생들의 문제 해결 과정과 안구 운동을 함께 측정하였다. 아이트래커 측정이 끝난 직후 안구 운동이 동기화된 문제 해결 영상을 이용한 회상자극면담을 통해 학생들의 문제 해결 과정에 대한 자기보고를 수집하였다. 문제 해결 과정과 안구 운동이 동기화된 영상과 회상자극면담에 대한 상호보완적 분석을 토대로 연구 문제에 대해 증거 기반의 객관적인 답을 제시하고자 하였다.

연구 문제 1.1에서는 도형 패턴을 일반화하기 위해 학생들이 시도하는 다양한 형태의 행동의 유형을 분류하고 분석하였다. 연구 문제 1.2에서는 안구 운동 지표에 대한 양적 분석을 실시한 후 질적 분석을 해석의 근거로 일반화 과정에서 나타나는 학생들의 시각적 주의의 특성에 대해 분석하였다. 연구 문제 1.3에서는 일반화에 실패한 사례들의 과정을 분석하고 오류의 원인에 대해 분석하였다.

연구 2에서는 연구 1의 결과와 구성주의(constructionism) 기반의 마이크로월드에 관한 선행연구를 바탕으로 학생들의 패턴 일반화 학습을 지원할 수 있는 거북 표현식 기반의 마이크로월드 exPattern을 설계하였다. 공통수업과 개별수업을 통해 연구 1에서 수행 정도가 낮았던 4명의 학생에게 마이크로월드의 사용법을 학습시킨 후 exPattern에서 학생들의 일반화 과정을 분석하였다. 안구 운동 자료와 회상자극면담 자료에 대한 상호보완적 분석을 통해 연구 문제에 답하고자 하였다.

연구 문제 2.1에서는 거북 표현식의 조작, 시각적 피드백 등 마이크로

월드 구성 요소와 학생의 상호작용을 분석함으로써 마이크로월드가 대수적으로 의미 있는 패턴 일반화 과정을 매개할 수 있는지 여부에 대해 확인하였다. 연구 문제 2.2에서는 연구 1의 지필 환경과 연구 2의 마이크로월드에서의 학생들의 문제 해결 과정과 안구 운동을 비교함으로써 마이크로월드를 활용한 활동에 의한 학생들의 변화에 대해 종합적으로 살펴보려고 하였다. 연구 1과 연구 2의 대상, 방법 및 주요 분석 내용은 <표 1-1>와 같다.

<표 1-1> 연구의 구성 및 방법

	연구 1	연구 2
구분	지필 환경에서의 패턴 그리기와 일반화	마이크로월드에서의 패턴 만들기 일반화
대상	중학교 3학년 18명	연구 1 참여자 중 패턴 일반화 수행 정도가 낮은 4명
방법	안구 운동 추적 실험 및 회상 자극면담	안구 운동 추적 실험 및 회상 자극면담
주요 분석 내용	<ul style="list-style-type: none"> - 행동의 유형과 역할 - 시각적 주의의 특성 - 오류의 과정 및 원인 	<ul style="list-style-type: none"> - 마이크로월드와의 상호작용 <ul style="list-style-type: none"> · 거북 표현식의 역할 · 시각적 피드백의 작용 - 지필 환경과의 비교 <ul style="list-style-type: none"> · 안구 운동 패턴의 변화

3. 용어 정의

도형 패턴(figural pattern)

도형적 대상(figural object)은 공간적 특성과 개념적 특성을 모두 갖는 것으로 어떤 속성을 소유하거나 관계를 나타내는 그림이라 할 수 있다(Rivera, 2007). 본 연구에서는 이러한 도형적 대상으로 구성된 패턴을 ‘도형 패턴’으로 정의한다.

도형적 추론(figural reasoning)

도형 패턴 과제에서 사례로 제시되는 도형의 물리적 구조로부터 패턴에 관한 성질, 관계, 규칙 등을 도출하는 추론 유형을 ‘도형적 추론’이라고 정의한다.

일반식(explicit formula)

도형 패턴의 n 단계를 구성하는 타일, 성냥개비 등의 대상의 수를 n 에 관한 다항식 $f(n)$ 으로 표현할 수 있을 때, $f(n)$ 을 ‘일반식’이라고 정의한다.

행동(action)

본 연구에서는 도형 패턴을 일반화하기 위하여 학생들이 수행하는 수학적 조작을 ‘행동’으로 정의한다.

가추(abduction)

Peirce(1839-1914)는 관찰된 결과를 설명하기 위한 가설의 생성과 특정 가설에 대한 선호를 포함하는 추론을 ‘가추’라 정의하였다(CP 7,202). 따라서 도형 패턴 일반화에서는 사례로 제시된 도형 패턴의 일부 단계에서 제공하는 단서를 토대로 모든 사례에서 성립하는 일반적인 규칙을 추측하는 추론의 과정을 가추라 한다. 이때 가추에 의해 생성된 가설은 오류 가능성이 있지만 설명가능한 추측이어야 하며 귀납적인 검증이 가능

한 형태이어야 한다.

귀납(induction)

Peirce는 가설을 기초로 한 추측을 실험을 통해 검증하는 추론으로 ‘귀납’을 정의하였다(CP 7.206). 따라서 패턴 일반화에서는 가추를 통해 생성한 패턴에 대한 일반적인 규칙을 몇 개의 사례를 통해 검증하는 추론의 과정을 귀납이라 정의한다.

마이크로월드(microworld)

마이크로월드는 Logo(Papert, 1980)의 출현과 함께 등장한 용어로 적절한 과제와 교육 체계가 있을 때, 학생들이 풍부한 의미를 창출해내는 탐구 및 구성 활동에 참여할 수 있도록 디자인된 일련의 과학적 개념과 관계를 포함하는 컴퓨터 환경을 지칭한다(Clements & Sarama, 2002).

II. 패턴 일반화에 관한 선행연구

1. 패턴 일반화

수학적 탐구 대상은 수와 도형에만 한정되는 것이 아니라 패턴에 대한 연구로 그 영역을 확장하는 과학이라는 의미에서 수학은 ‘패턴의 과학’이라 할 수 있다(Steen, 1988). 수학의 힘은 패턴과 일반화를 이끌어내는 관계와 변환에 있다(Warren & Cooper, 2008). 패턴과 구조를 인식하는 능력은 일반적인 수학적 이해와 높은 상관관계를 맺으며 아동들의 수학 성취를 예측할 수 있는 지표이다(Mulligan & Mitchelmore, 2009).

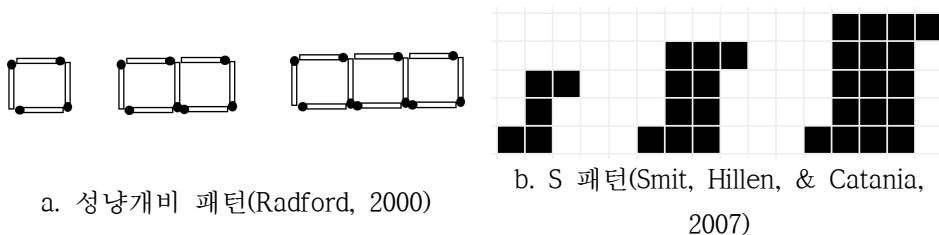
Zazkis & Liljedahk(2002)는 수학의 학습에서 학생들의 주의를 다양한 수학적 주제의 기초가 되는 패턴으로 유도하는 것이 필수적이라고 주장하였다. 패턴 활동은 학교 수학의 통합된 주제 중 하나로 볼 수 있으며, 여러 상황에서 나타나며 다양한 개념의 개발과 연관된다(NCTM, 2000). 최근 일부 나라에서는 패턴을 대수와 묶어 하나의 독자적인 영역으로 분류하고 교육과정 전반에 걸쳐 교육하기 시작하였다. 예를 들어, 캐나다의 온타리오 교육과정에서는 ‘패턴과 대수(patterning and Algebra)’라는 영역을 초등학교 1학년부터 8학년까지 다루며(Ontario Ministry of Education, 2005), 호주의 수학과 교육과정에서도 ‘수와 대수(Number and algebra)’라는 영역의 세부 내용으로 ‘패턴과 대수(pattern and algebra)’를 유치원부터 10학년까지 다루고 있다(Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority[ACARA], 2015). 우리나라의 경우 교육과정 내에서 패턴을 하나의 독립된 주제나 성취기준으로 다루고 있지는 않지만, 초·중학교 교과서에서 규칙성, 함수 등의 단원에서 다양한 패턴 문제를 다루고 있다(이종희, 이수연, 2013).

학교수학에서 사용되는 패턴은 크게 수 패턴과 도형 패턴으로 분류할 수 있다. 수 패턴은 숫자로만 구성된 패턴이다. 일반적으로 도형 패턴(figural pattern)은 성냥, 타일, 연결큐브 등 기본 단위의 대상들이 예측

가능한 방식으로 단계에 따라 변화하는 일련의 그림으로 정의할 수 있다(Billings, Tiedt, & Slater, 2007, p. 303). 도형 패턴은 일반적으로 독립변수와 종속변수를 포함한다. 패턴의 수량화 가능한 특정 측면(종속 변수)이 패턴 내에서 그림을 공간적으로 구분하는 색인(독립변수)과 조화를 이룬다(Billings, 2008, p. 280). Rivera & Becker(2011)는 학교 수학에서 다루는 패턴이 가진 일반적인 성질을 다음과 같이 정리했다.

- 1) 제시된 단계들로부터 함수적 공식을 도출할 수 있다.
- 2) 제시된 단계는 형식적으로 해석된 가설 또는 일반화를 통해 패턴의 확장을 도울 수 있다. 즉, 일정 범위의 항들을 생성할 수 있다.
- 3) 각 단계들은 어떤 식으로든 서로 닮아있다.

[그림 II-1]는 두 가지 도형 패턴의 예이다. [그림 II-1.a]의 수량적 측면은 성냥개비의 개수가 될 수도 있으며, 삼각형의 개수일 수도 있다. 성냥개비의 수를 예로 들면, n 단계에 필요한 성냥개비의 수 $M_n = 2n + 1$ 로 표현된다. [그림 II-1.b]의 수량적 측면은 타일의 개수이며, n 단계에 필요한 타일의 수 $T_n = n^2 + 2n + 2$ 꼴로 표현된다. 이와 같이 도형 패턴에서는 단계(색인)와 패턴의 수량적 측면 사이의 일반적인 관계를 찾아 대수적인 기호로 표현할 수 있다. 이에 도형 패턴은 일반화와 대수적 사고의 개발과 관련되어 연구되어왔다. 본 절에서는 수학에서 일반화의 의미를 살펴보고 도형 패턴의 일반화와 대수적 사고 사이의 관련성을 확인한다.



[그림 II-1] 도형 패턴의 예

1.1. 일반화

일반화는 과학 지식뿐 아니라 일상생활 속의 비과학적 지식의 본질적인 특성 중 하나로 실세계를 설명하고 이해하는 데에도 핵심이 되는 요소이다(김남희, 1997). 일반화는 수학적 지식의 성장의 본질이며(Polya, 1957), 수학적인 개념, 대상, 명제, 증명 등에 수반되는 대단히 중요한 수학적 사고 중 하나이다(김남희, 1997, p. 445).

Polya(1957, p. 108)는 일반화를 “하나의 대상에 대한 고찰에서 그 대상을 포함하는 집합의 고찰로 이행하는 것 또는 제한된 집합에 대한 고찰을 그것을 포함하는 더 큰 집합에서의 고찰로 이행하는 것”이라고 정의하였다. Dreyfus(1991, p. 35)도 일반화를 특정 사례들 사이의 공통점을 식별하고 처음에 고려했던 범위를 초월해서 추론을 확장하는 것으로 설명하였다.

일반화의 유형에 관한 관점은 연구자마다 조금씩 차이가 있다. Dörfler(1991, 2008)는 일반화의 유형을 경험적 일반화와 이론적 일반화로 분류하였다. 경험적 일반화는 공유되거나 공통적인 특징과 특성에 따라 분류되는 일련의 사례들을 지각적으로 비교하는 것을 기반으로 한다. 이러한 과정으로부터 추상화되거나 구성된 특성이 경험적 개념을 구성한다. 경험적 일반화의 산물은 소위 원형(예: “새”, “나무”)의 형태로 기억되고 표현된다. 경험적 일반화는 구성적이고 창조적인 요소를 가지고는 있지만, 그 결과가 관찰된 사례나 주어진 자료에 의해 바뀌지는 않는다. 경험적 일반화는 여러 대상이나 상황 내에 이미 존재하고 있는 것이 추출되어 단지 추상화되는 것일 뿐이다. 반면, 이론적 일반화는 능동적으로 상황과 상호작용하거나 상황을 변형하는 것으로부터 발생한다. 이론적 일반화는 주어진 대상(실제 또는 상상 속에서)에 대한 행동으로부터 비롯되는 불변적이고 반복적인 관계에 의해 이루어진다. 여기서 행동은 각각의 대상들을 만들거나 생산하는 것들이다. 이론적 일반화는 전형적이고 일반적인 사례들을 구성적인 변환을 통해 분석하는 것이다. 경험적인 개념들은 대부분 조형적인 반면 이론적인 개념들은 관계적이다. 이

론적 개념은 함수가 여러 가지 표현을 가지고 있는 것처럼 다양한 방식으로 구체화 될 수 있다. 원의 경험적 개념은 “둥글다”이며 이론적 개념은 “한 정점으로부터 같은 거리에 있다는 성질”이다. 그의 관점에서 [그림 II-1.a]의 사각형 패턴에서 “이쭈시개가 3개씩 늘어난다”는 진술은 지각적인 관찰에 의한 경험적 일반화인 반면 함수적 관계인 $f(n) = 3n + 1$ 을 도출하는 것은 이론적 일반화라 할 수 있다.

Harel & Tall(1991)은 수학적 일반화는 각 개인이 현재 가지고 있는 수학적 지식에 따라 달라진다고 보고 개인의 정신적 구조에 따라 일반화를 확장 일반화, 재구성 일반화, 분리 일반화의 3가지 유형으로 구분하였다. 확장 일반화는 자신이 기존에 가지고 있는 도식을 단순히 넓은 범위로 확장하는 것이며, 재구성 일반화는 적용 범위를 넓히기 위하여 기존의 도식을 재구성할 때 발생한다. 분리 일반화는 친숙한 맥락에서 새로운 맥락으로 이행할 때, 새로운 맥락에 대처하기 위해 별개의 새로운 도식을 기존의 도식에 추가하는 것을 의미한다. 분리 일반화의 경우 단기적으로는 성공적인 도식처럼 보이나 단순히 물리적으로 도식을 추가하는 과정이므로 최종적으로는 인지 발달을 가져오지 못한다. 장기적인 관점에서 확장 및 재구성 일반화가 인지 발달에 적합하며, 이중 확장 일반화가 재구성 일반화보다 인지적으로 쉬운 과정이다. 따라서 학생들에게는 현재 상황에 대한 의미있는 이해를 유도할 수 있는 경험을 제공하여 보다 일반적인 경우로의 확장 일반화가 이루어질 수 있도록 하는 것이 바람직한 접근이라 주장하였다. 부득이하게 재구성 일반화가 필요한 경우 재구성이 쉽게 일어날 수 있는 조건들을 학생들에게 제공할 필요가 있다고 하였다.

일반화는 수학적 개념의 이해, 문제해결 등에 사용되는 수학적 사고의 중요한 측면 중 하나이다(김남희, 1997). 일찍이 학교수학의 원리와 기준(NCTM, 2000)에서는 수학교육의 주요 목표 중 하나로 일반화를 제시한 바 있다. 영재에 대한 방대한 연구를 실시한 Krutetskiĭ, WIRSZUP, & Kilpatrick(1976)의 연구에 의하면 수학 학습에서 서로 다른 능력을 가진 학생들은 수학 내용을 일반화하는 능력과 일반화를 기억하는 능력 발달

에서 많은 차이가 있다. 즉, 일반화는 학생들이 성공적인 수학 학습을 위해 반드시 갖추어야 할 사고 중 하나이다.

1.2. 패턴 일반화

Radford(2010, p. 40)는 모든 기호화가 대수적인 것은 아니며, 모든 패턴 활동이 대수적 사고로 이어지는 것도 아니라고 하였다. Radford(2008)는 대수적 패턴 일반화란 특수한 것들로부터 공통성의 인식과 일반성에 대한 대수적 표현을 포함한다고 주장하였다. 그는 대수적 패턴 일반화란 한 수열 S 의 특정 요소 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ 를 인지하여 공통성을 발견하고 이러한 공통성이 S 의 모든 이후의 항 $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$ 에 적용된다는 것을 인식하며 공통성을 이용하여 S 의 임의의 항을 구할 수 있는 일반식을 구하는 능력이라고 하였다(Radford, 2008, p. 84).

Radford(2014)는 대수적 사고는 불확실성(indeterminacy)과 분석적 접근(analyticity), 그리고 상징화(denotation)를 특징으로 갖는다고 하였다. 즉, 대수적 사고는 불확실한 대상을 분석적으로 다루고, 그 대상을 언어, 제스처, 기호 등을 이용하여 상징적으로 지정하는 것이다. 그는 시행착오를 통해 패턴의 일반식을 구하는 것은 기호를 사용했다고 하더라도 불확실한 대상을 분석적인 방법으로 접근한 것이 아니기 때문에 대수적이지 않다고 주장하며 이를 일반화와 구분하여 ‘단순한 귀납법(naïve induction)’으로 분류하였다. 반면, 시각적 표현의 재구조화는 공통성을 발견하고 일반화하는 데 유효한 전략으로 간주하였다.

Radford(2008)는 패턴 일반화에 있어서 ‘산술적’ 일반화와 ‘대수적’ 일반화를 구분하였다. 산술적 일반화는 국소적인 공통성을 발견하여 산술적인 방법으로 인접한 항을 구하는 것이다. 성냥개비 패턴에서 재귀적인 규칙을 이용하여 3씩 더하면서 20번째 성냥개비의 수를 구하는 것이 대표적인 산술적 일반화의 예이다. 그러나 이러한 방법은 매우 큰 항이나 임의의 항을 결정하는 데 사용될 수 없으며 불확실한 양과 관련된 연산을 수행하지 않는다는 측면에서 대수적이지 않다. 그는 대수적 일반화에 도달하기 위해서는 공통성의 인식, 일반화 개념의 형성 외에도 임의

<표 II -1> 패턴 일반화의 층(Radford, 2010)

산술적 일반화	대수적		
	사실적 일반화	맥락적 일반화	기호적 일반화
국소적으로 패턴의 일부 공통적인 특성을 발견하지만, 이를 이용하여 임의의 n 단계를 표현하는 일반식을 구하지는 못함	임의의 단계를 계산하는 방법을 구성함. 불확정성이 명명되거나 선언되어 다루어지지 않지만 제스처, 일상적 언어, 리듬과 같은 행동에 의해 암시적인 형태로 표현됨	불확정성이 언어적으로 명시되어 다루어짐. ‘단계의 수’, ‘다음 그림’과 같은 방식으로 변수에 대한 맥락적 참조가 나타남	일반성이 문자와 숫자로 이루어진 대수적 기호를 통해 표현됨

의 단계의 패턴을 표현하는 규칙인 도식의 형성이 필요하다고 하였다. 그는 도식이 표현되는 형태에 따라 대수적 일반화를 사실적(factual), 상황적(contextual), 상징적(symbolic)으로 구분하였다(Radford, 2010). 사실적 일반화는 학생들이 기호의 축약 없이 제스처나 일상적인 언어 등을 사용하여 자신의 일반화를 표현하는 것을 말한다. 맥락적 일반화는 ‘이 그림’, ‘다음 단계’와 같이 수학적 기호의 축약을 사용하여 일반화된 규칙을 표현하는 것이다. 마지막으로 대수적 일반화는 대수적 기호를 사용하여 $T = 3n + 1$ 과 같이 일반화하는 것을 의미한다. Radford는 이러한 분류를 패턴 일반화에 대한 층(layer)이라 부르며 <표 II -1>와 같이 정리하였다. Radford의 이러한 분류는 표현 수준의 분류일 뿐 대수적 사고의 수준을 나눈 것은 아니다. 현대의 영숫자 기호가 매우 강력한 상징적 체계를 구성하는 것은 사실이지만, 표기법만으로 대수적 사고를 특징지을 수 없으며 상징화는 영숫자 표기뿐 아니라 일상언어, 제스처, 새로운 기호 등을 통해 다양한 방법으로 이루어질 수 있다(Radford, 2014, p. 260).

한편, Rivera(2010a)는 패턴 일반화는 지각적 능력과 상징적 추론 능력의 상호 조정을 통해 일반식을 도출할 수 있는 타당하고 대수적으로 유용한 구조를 구성하고 정당화하는 것이라고 정의하였다. 그는 패턴의 임의의 단계를 설명할 수 있고 패턴의 해석된 구조에 대해 정당화할 수 있

을 때에만 대수적으로 의미 있는 패턴 일반화가 일어난 것으로 보았다(Rivera, 2013). 따라서 그는 도형적 추론에 의한 패턴 일반화를 중심에 두고 관련된 많은 연구를 진행하였다(e.g. Rivera, 2010a; Rivera & Becker, 2008, 2009, 2011). 시각적 추론에 관한 Rivera의 주요 연구 내용은 본 장의 3.1절에서 자세히 살펴본다.

Radford는 표현 형식에 따라 사실적, 맥락적, 기호적 일반화를 구분하였지만, 이들 모두 산술적 일반화와 구분되는 대수적 일반화로 보았다. 그는 패턴 일반화에서 중요하게 다루어야 할 것은 논리적 측면이라고 하였으며(Radford, 1996), 단순한 귀납법과 달리 분석적인 방법으로 일반적 도식을 표현한 경우만을 대수적 사고에 의한 일반화로 보았다(Radford, 2010; Radford 2014). 따라서 Radford 관점에서도 논리적으로 설명 가능한 일반화가 대수적으로 의미 있는 일반화라 할 수 있다.

이상의 논의를 종합하면, Radford와 Rivera는 공통적으로 논리적인 방법으로 일반식을 구하고 정당화할 수 있을 때 대수적으로 유의미한 패턴 일반화 활동이 이루어지는 것으로 보았다. 또한 이들은 공통적으로 도형적 추론을 바탕으로 하는 패턴 일반화 활동의 중요성을 강조하였다.

1.3. 도형 패턴의 일반화와 대수적 사고

많은 연구자들이 일반화가 수학적 사고 중에서도 특히 대수적 사고의 본질임을 강조하였다. Lee(1996)는 “함수, 모델링, 그리고 문제해결 모두 일종의 일반화 활동이며, 대수 더 나아가서 모든 수학이 패턴의 일반화에 관한 것임이 분명하다.” 라며 일반화를 대수와 관련된 가장 중요한 활동으로 간주하였다. Mason et al.(2005)은 특수한 사례를 일반화하고 추상화하는 것이 대수의 본질이라 하였다. Blanton & Kaput(2005, p. 413)은 대수적 추론을 “특정 사례들로부터 수학적 아이디어를 일반화하고, 논증을 통해 일반화를 확고히 하며, 나이에 맞게 점진적으로 일반화를 형식적으로 표현하는 과정”으로 보았다. 학교 수학의 원리와 기준(NCTM, 2000)은 학생들이 대수적 사고의 중요한 측면으로서 패턴을 분석, 확장, 일반화하고 표현할 수 있는 기회를 갖도록 권장한다. NCTM에

서 발간한 ‘대수적 사고의 필수이해’ (Blanton, Levi, Crites, Dougherty, & Zbiek, 2011)에서는 대수에서의 핵심 아이디어 5가지와 필수이해를 다음과 같이 제시하고 있다.

핵심 아이디어1. 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈은 산술에서와 같이 대수에서도 같은 성질로 작용한다.

핵심 아이디어2. 두 양이 동치임을 보이기 위하여 등호를 사용하여 나타낸 수학적 진술을 등식이라고 한다.

핵심 아이디어3. 변수는 간결한 방법으로 수학적 아이디어를 기술하기 위해 사용되는 다목적 도구이다.

핵심 아이디어4. 양적 추론은 양 사이의 관계를 서술하고 일반화하기 위하여 양 사이의 관계를 확장한다.

핵심 아이디어5. 함수적 사고는 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하기, 이러한 관계를 말, 기호, 표, 또는 그래프로 표현하기, 함수 행동을 분석하기 위해 다양한 표현으로 추론하기를 포함한다.

도형 패턴의 일반화는 이러한 대수의 핵심 아이디어와 밀접하게 관련된다. 실제로 많은 연구가 도형 패턴의 일반화 활동이 대수적 사고를 촉진하고 지원하는 강력한 도구임을 보였는데, 선행연구의 내용은 크게 다음과 같이 5가지로 분류할 수 있다.

- 1) 일반성의 표현(김성준, 2003; Mason, 1996; Mason et al., 2005)
- 2) 함수적 사고(Markworth, 2010; Moss & McNab, 2011; Warren & Cooper, 2006)
- 3) 변수 개념(지영명, 유연주, 2014; English & Warren, 1998; Mason, 1996; Warren & Cooper, 2008)
- 4) 대수적 표현의 동치 개념(Warren & Cooper, 2008; Watson & Mason, 2006)
- 5) 비형식적 정당화(최수미, 정영옥, 2010; Lannin, 2005)

예를 들어 [그림 II-1.a]의 성냥개비 패턴에서 학생들은 “각 단계에는 단계의 수만큼 정사각형이 있다”, “단계가 하나 늘 때마다 성냥개비의 총 개수는 3개씩 증가한다” 등 다양한 일반성을 발견할 수 있다. 또 어떤 학생은 “각 단계는 3개의 성냥개비를 ‘ㄷ’ 모양으로 단계의 수만큼 이어붙인 후 마지막으로 1개의 성냥개비를 붙인 것이므로 ” (성냥개비의 수) $= 3 \times (\text{단계}) + 1$ ” 라고 일반화를 표현할 수 있다. 이러한 일반화는 도형 패턴에서 구조를 찾아 그 일반성을 표현한 것이라 볼 수 있다(Watson & Mason, 2006). Mason et al.(2005)은 이러한 일반성의 표현이 곧 대수의 심장이라 하였다. 학생들은 일반화된 규칙을 그림, 언어, 자신만의 기호로 다양하게 표현할 수 있으며, 이는 궁극적으로 대수적 기호로 이행될 수 있다(Blanton et al., 2011; Kinach, 2014). 패턴 활동은 대수를 배우지 않은 학생들에게는 비형식적으로 대수적 기호를 창조하는 맥락을 제공할 수 있으며, 대수를 이미 배운 학생은 대수적 기호의 유용성을 경험하는 계기를 제공한다(Amit & Neria, 2008). 따라서 이러한 활동은 전통적인 대수 교육과정에서 강조되었던 미지수와 방정식 해결 중심의 구문론적 측면을 대신하여 일반성의 표현이라는 의미론적 측면에서 대수에 접근할 수 있게 한다(김성준, 2003). 이에 많은 연구자들은 도형 패턴이 일반성을 표현하는 수단이라는 대수의 측면을 경험하게 하는 유용한 도구임을 주장하였다(김성준, 2003; Mason, 1996; Mason et al., 2005).

한편, 도형 패턴은 재귀적 관계, 공변 관계, 대응 규칙이라는 함수적 사고의 중요한 패턴들을 발견하고 탐구할 수 있는 수단을 제공한다(Blanton & Kaput, 2011). “단계가 하나 늘 때마다 성냥개비의 총 개수는 3개씩 증가한다”는 재귀적 관계이다. “단계가 1 늘어날 때마다 성냥개비가 3 늘어나며, 성냥개비가 3 늘어날 때마다 단계가 1 증가한다”는 것은 두 양 사이의 공변 관계를 인식한 것이다. n 단계 그림에서 성냥개비의 수를 M 이라 할 때 $M = 3n + 1$ 이라는 식은 두 변수 M, n 사이의 대응 규칙이자 일차함수 관계를 나타낸 것이다. 도형 패턴은 적절한 방식으로 소개된다면 초등학교 저학년부터 중학교까지 모든 연령의 학생들의 함수적 사고를 지원하는 효과적인 수단이다(Markworth, 2010; Moss &

McNab, 2011).

한편, 변수는 함수와 밀접한 개념이다. 도형 패턴의 일반화는 변수 개념의 도입에 좋은 소재이며 변수에 대한 이해를 높인다(English & Warren, 1998). 도형 패턴은 변수의 다양한 측면과 관계된다. 예를 들어, $M=3n+1$ 을 단계 n 의 변화에 따른 전체 성냥개비의 수 M 으로 본다면 M 과 n 은 변수의 여러 가지 의미 중 변화하는 양에 해당한다. n 은 임의의 단계를 나타내는 문자라는 측면에서 다가이름으로 볼 수도 있다. m 번째 그림에서부터 시작되는 새로운 패턴에 대해 그 패턴의 n 번째를 묻는 질문을 통해 매개변수의 의미 있는 지도도 가능하다(지영명, 유연주, 2014). 마지막으로 “91개의 성냥이 사용되었다면 몇 번째 그림이겠는가?”와 같은 질문을 통해 자리지기로서의 미지수 개념을 사용하게 할 수도 있다(Radford, 1996).

도형 패턴이 수 패턴과 가장 크게 차별화되는 점은 패턴의 물리적인 구조 안에 일반화를 위한 시각적인 단서가 내포되어 있다는 것이다(Bishop, 2000; Lee & Freiman, 2006). 도형 패턴의 이러한 특성은 대수적 표현의 동치를 탐구하거나 형식적인 증명 교육 이전의 정당화 교육을 가능하게 한다. 예를 들어, [그림 II-1.a]의 패턴에서는 3개의 성냥개비가 사각형을 이루면서 오른쪽에 추가된다. 따라서 n 단계 그림에는 n 개의 사각형이 있는데, 중복을 피하기 위해 1개는 4개의 변을 세고, 나머지 사각형들은 3개의 변만 세어주면 총 $4+3(n-1)$ 개의 성냥개비로 구성된다는 것을 추론할 수 있다. 즉, 사각형을 이루며 성장하는 패턴의 공간적인 특성이 임의의 n 단계에서의 성냥개비의 수를 일반화하고 설명하는 근거가 되는 것이다. 만약 이 패턴이

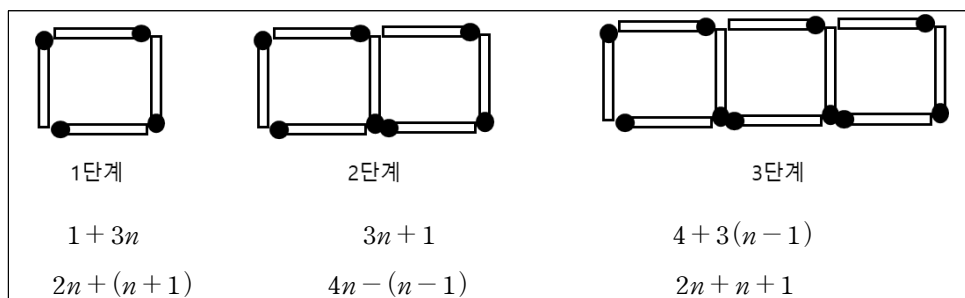
4, 7, 11, 14, 17, ...

와 같은 수 패턴 형태로 주어졌다면 이러한 추론은 불가능할 것이다. 도형 패턴의 구조는 학생들이 자신의 일반화 표현이 참임을 설명할 수 있는 근거를 제공하므로 학생들에게 형식적인 증명 교육의 전 단계로서

비형식적 정당화 학습의 기회를 제공할 수 있다(최수미, 정영옥, 2010; Lannin, 2005; Rivera, 2010a). [그림 II-1.b]는 $ax^2 + bx + c$ 꼴의 비선형 이차패턴이다. 수열 형태로 제시된 이차패턴은 소인수분해를 하거나 계차를 이용하여 일반식을 구해야 하는데, 이는 어린 학생들에게 쉽지 않은 일이다. 그러나 [그림 II-1.b]의 n 단계의 경우 좌우 양끝에 2개의 불변하는 타일이 있고, 중앙 부분에는 $n+2$ 개씩 n 개의 타일이 있으므로 총 타일의 수 $T_n = n(n+2) + 2$ 임을 시각적으로 도출할 수 있다. 따라서 도형 패턴이 제공하는 시각적 단서는 어린 학생들도 이차패턴을 추측과 확인이 아닌 설명 가능한 방법으로 일반화 할 수 있는 기회를 제공한다(Amit & Neria, 2008; Krebs, 2003; Orton & Orton, 1999). 국내 연구에서도 이명기, 나귀수(2012)는 ax^2 꼴로 표현되는 이차패턴도 적절한 상황과 함께 주어진다면 초등학교 학생들에게 의미 있는 일반화 활동을 경험하게 할 수 있음을 보였다. 그들은 위 그림의 'S' 패턴과 같은 $ax^2 + c$ 꼴의 보다 복잡한 이차 패턴이 초등학생에게 제시하기에는 난이도가 높다고 평가하였지만, 그림에도 불구하고 그들의 연구에 참여한 초등학교 6학년 학생의 50% 이상이 이 패턴을 일반화할 수 있었다.

앞에서 성냥개비 수를 $3n+1$ 또는 $4+3(n-1)$ 의 두 가지 방식으로 일반화했듯이 도형 패턴의 물리적 구조는 다양한 방식으로 해석될 수 있으며, 해석 방식에 따라 서로 다른 일반식이 도출될 수 있다. 예를 들어 성냥개비 패턴은 [그림 II-2]와 같이 다양한 방식으로 일반화될 수 있다.

학생들은 동일한 패턴의 여러 가지 일반화 표현을 비교하면서 대수적



[그림 II-2] 성냥개비 패턴의 다양한 해석 방법

으로 동치인 식의 의미, 괄호의 역할, 수와 문자를 곱하는 방법 등을 배울 수 있으며 결국 성냥개비 패턴을 가장 간단한 식으로 나타내면 $3n+1$ 이 된다는 것을 알 수 있다(Watson & Mason, 2006). 도형 패턴은 패턴을 다양한 방법으로 일반화할 수 있는 맥락을 제공하고, 서로 다른 일반화 방법의 대수적 동치 관계를 이해하고 등식의 개념을 획득하는 기회를 제공할 수 있다(Lee & Freiman, 2006; Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa, & Fonseca, 2012; Warren & Copper, 2008).

Moss & McNab(2011)는 도형 패턴이 잘 사용된다면 모든 수준의 학생에게 양 사이 관계의 분석, 구조의 인식, 변화의 탐구, 일반화, 문제 해결, 모델링, 정당화, 증명 및 추측과 같은 대수적 추론을 촉진할 수 있다고 하였다. 이는 곧, 연구의 관점에서 도형 패턴 일반화는 학생들의 대수적 사고의 다양한 측면과 관련된 역량을 살펴볼 수 있는 좋은 과제가 됨을 의미하기도 한다.

2. 패턴 일반화 과제의 설계

2.1. 도형 패턴의 유형

도형 패턴의 탐구에 있어서 수치적 추론뿐 아니라 공간적인 추론도 중요한 역할을 한다. 따라서 패턴의 물리적인 구조는 학습자의 패턴 일반화 과정에 많은 영향을 미친다. 패턴의 구조에 따라 시각적인 단서를 제공하는 방식이 달라지며, 가능한 일반화 표현의 개수도 달라지기 때문이다. Rivera(2010a)은 모든 도형 패턴이 대수적으로 유의미한 활동을 이끌어내는 것이 아님을 강조하였다. 그는 물리적 구조가 단계(색인)에 명확하게 연결될 수 있고, 다양한 방식으로 해석될 수 있는 패턴을 선택하면 학습자가 불확정성을 인식하고 대수적 사고를 개발하기 위한 일반화를 표현할 수 있는 기회가 증가한다고 하였다.

도형 패턴의 유형과 발문 방식은 학생들의 패턴 일반화 과정에 영향을 미친다(Lannin et al., 2006a; Noss et al., 1997). 따라서 도형 패턴의 유형을 분류하고 각각의 특성을 조사하는 것은 패턴 일반화에 관한 수업 설계나 연구에 있어서 의미 있는 기초작업이 될 수 있다. 이 절에서는 선행연구에서 사용된 도형 패턴의 유형을 분류하고 특징을 살펴보며 관련된 연구결과를 정리한다.

2.1.1. 반복패턴과 성장패턴

일반적으로 도형 패턴은 패턴의 생성 방식에 따라 반복패턴(repeating pattern)과 성장패턴(growing pattern)으로 구분된다. 반복패턴은 어떤 반복단위(unit of repeat)를 이어붙여서 구성할 수 있는 패턴을 말하는데, 이를 문자로 표현하면 다음과 같다(Zazkis & Liljedahl, 2002).

AB, ABAB, ABABAB,

예를 들어, Warren & Cooper(2008)에서 사용된 [그림 II-3.a]는 반복패턴으로 분류할 수 있는데 반복단위인 2개의 십자가를 오른쪽에 한 번 더 이어붙이면 다음 단계의 패턴이 되기 때문이다. 반복패턴은 가장 기본적인 도형 패턴으로 주로 초등학교 저학년 학생의 패턴 활동에 활용된다.

한편, [그림 II-3.b]과 같은 도형 패턴은 이전 단계에서 다음 단계로 발전할 때, 일정한 규칙에 따라 예측가능한 방식으로 성장하지만 어떤 반복단위가 존재하지 않는다는 점에서 반복패턴과 구분된다. 이러한 패턴을 일반적으로 성장패턴이라 한다(Billings, 2008).



a. 반복패턴(Warren & Cooper, 2008) b. 성장패턴(Rivera & Becker, 2011)

[그림 II-3] 반복패턴과 성장패턴의 예

2.1.2. 일반식의 형태에 따른 분류

선행연구에서는 일반적으로 패턴의 일반화 표현인 일반식의 차수로 패턴을 선형 패턴과 비선형 패턴으로 구분한다. 선형 패턴은 $an+b$ 꼴의 일차식으로 표현되는 패턴이며, 그 외의 패턴을 비선형 패턴으로 분류한다. 비선형 패턴에는 an^2+bn+c 꼴의 이차패턴, an^3+bn^2+cn+d 꼴의 삼차패턴, a^x 꼴의 지수패턴 등이 있다. 선행연구를 보면 초등 저학년을 대상으로 하는 연구에서는 선형패턴을 주로 사용하였고, 초등 6학년 이상을 대상으로 하는 연구는 일차패턴과 함께 이차패턴 과제를 사용하기도 하였다(e.g. Krebs, 2003).

일반적으로 학생들은 선형적인 상황보다는 비선형적인 상황을 일반화하는 것을 어려워 한다(De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002; Safford & Langrall 2000). 여러 연구에서 일반적으로 일반식의 차수가 증가할수록 패턴 일반화 과제의 난이도가 증가함을 보고하였다. 예를 들어 English & Warren(1998)의 연구에서 12-15세 학생들은 $x+c$,

<달걀 문제> 다음은 달걀을 배열해 놓은 것입니다. 달걀 개수를 세어 봅시다.



[그림 II-4] x^2 꼴 패턴(이명기, 나귀수, 2012)

ax , $ax+c$, $ax-c$ 중에서 $x+c$, ax 보다 $ax+c$ 와 $ax-c$ 를 어려워했다. 정홍춘, 이경화(2008)의 중학교 1학년을 대상으로 한 연구에서는 $an-b$, an^2+bn+c , an^2+bn+c , an^3+bn^2+cn 순서로 정답률이 높았다. 초등학교 6학년 일반학생을 대상으로 한 유미경, 류성림(2013)의 연구에서도 an , $n+a$, $an+c$, an^2 , an^2+c , a^n 순으로 일반화 성공비율이 높았다. 장혜승(2015)의 중학교 2학년 상위권 학생을 대상으로 한 연구에서도 an , $n+c$, $an+c$, an^2 , n^2+c , an^2+bn+c 순서로 정답률이 높았다. SOLO 분류법을 사용한 연구에서도 비선형 패턴이 선형 패턴보다 난이도가 높았다(Jurdak & El Mouhayar, 2014).

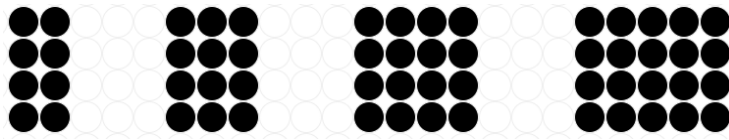
그러나 이차패턴의 정답률이 일차패턴보다 높은 경우도 있었다. 이명기, 나귀수(2012)의 연구에서 초등학교 6학년 일반학생의 경우 x^2 꼴의 패턴을 $x+a$ 꼴이나 $ax+c$ 꼴의 패턴보다 쉽게 대수적으로 일반화하였다. 이들이 사용한 x^2 꼴의 패턴은 [그림 II-4]와 같은 달걀 문제인데, 배치된 달걀의 가로와 세로가 패턴의 단계 숫자와 정확히 일치하기 때문에 쉽게 함수적 관계인 x^2 을 도출할 수 있었던 것으로 판단된다.

한편, 동일한 $ax+b$ 꼴로 표현되는 패턴도 패턴의 물리적 구조에 따라 난이도가 달라진다. [그림 II-5.a]의 V패턴은 $2x+1$ 꼴로 표현되며, [그림



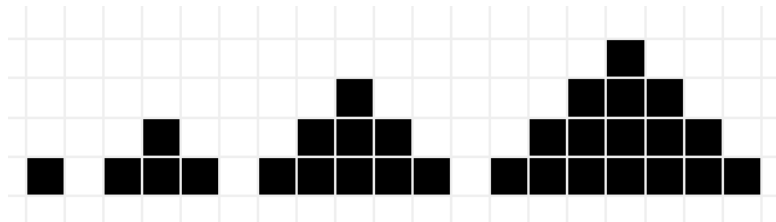
[그림 II-5] $ax+b$ 꼴 패턴(이명기, 나귀수, 2012)

II -5.b]의 울타리 패턴은 $4x+4$ 로 표현된다. 이명기, 나귀수(2012) 연구에서 V패턴에 대해 대수적 일반화에 성공한 학생은 47.9%였지만, 울타리 패턴은 31.1%였다. 즉, 패턴의 물리적인 구조에 따라 정답률이 달랐다. 최종적으로 정리된 일반식의 차수나 꼴만으로 해당 패턴이 학생들에게 주는 인지적 부담을 정량적으로 산출하거나 비교할 수는 없음을 알 수 있다.



[그림 II -6] $4x+4$ 꼴의 성장패턴

예를 들어 [그림 II -6]의 패턴은 일반식이 $4x+4$ 인 패턴이지만, 이명기, 나귀수(2012)에서 사용된 울타리 패턴보다 일반화하기 쉽다. 동일한 일반식을 갖는 패턴일지라도 그 물리적 구조에 따라 일반화의 과정과 난이도가 달라질 수 있다.



[그림 II -7] x^2 꼴의 이차패턴(Friel & Markworth, 2009)

[그림 II -7]의 패턴의 경우도 달걀 패턴과 동일하게 x^2 꼴이다. 만약 이 패턴을 수 패턴으로 변환한다고 하면 동일한 제곱수의 수열이 되므로 난이도에 차이가 없다. 그러나, 도형 패턴의 물리적 구조에 근거한 일반화 과정에서 보면 [그림 II -7]의 패턴은 달걀 패턴보다 어렵다는 것을 알 수 있다. 오른쪽에 있는 사각형들을 왼쪽으로 옮겨 정사각형으로 변환시키는 과정이 한 번 더 필요하기 때문이다. Sasman, Linchevski, &

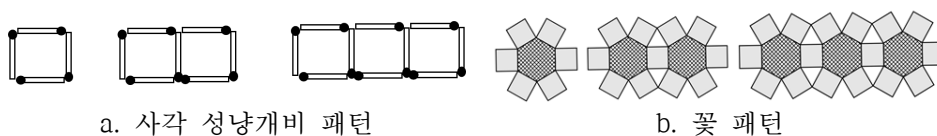
Olivier(1999)는 이와 같이 기하학적 변환 후에 시각적 추론을 통해 함수적 관계를 얻을 수 있는 패턴들을 불투명한 기하적 패턴(non-transparent geometric pattern)이라고 하며, 일반적인 패턴들과 구분하였다.

정리하면, 일반적으로 학생들에게 선형패턴보다는 비선형패턴이 어렵다고 볼 수 있다. 그러나 학생들에게 친숙한 x^2 꼴의 사각수 이차패턴은 선형패턴보다 일반화의 성공비율이 높았다. 또한 일반식이 같더라도 도형 패턴의 물리적 구조에 따라 정답률이 달라질 수 있다. 따라서 패턴 일반화 과제의 난이도는 단순히 일반식의 꼴로 판단할 수 없으며 패턴의 물리적 구조를 고려할 필요가 있다. 그러나 도형 패턴의 구조적 특성을 조사하고 분류한 연구는 없다. 이에 다음 절에서는 선행연구에서 사용된 선형 패턴들을 물리적 구조의 특성에 따라 분류한다.

2.1.3. 구조적 특성에 기반한 선형 패턴의 분류

선행연구에서 사용된 도형 패턴은 타일, 바둑돌, 성냥개비, 점, 쌓기나무 등의 다양한 소재로 구성되어 있다. 아직 도형 패턴의 소재가 학생들의 패턴 일반화 과정에 미치는 영향을 조사한 연구는 없다. 일반적으로 소재가 다른 패턴 사이에서도 구조적인 동형을 생각해볼 수 있다. 예를 들어 [그림 II-8.a]의 사각 패턴과 [그림 II-8.b]의 꽃 패턴은 특정 도형이 하나의 부분을 공통으로 공유하면서 반복된다는 점에서 구조적으로 동일하다고 볼 수 있다.

여기에서는 국내외 선행연구에서 사용된 선형 패턴을 구조적 특성에 따라 분류하고, 각 유형이 학생들의 시각적 추론과 일반화 과정에 영향을 미칠 수 있는 특성에 대해 살펴보고자 한다. 이러한 작업은 도형 패턴 과제를 구성하고, 학생들의 패턴 일반화 과정을 분석하는 이론적 기



[그림 II-8] 구조가 동형인 성냥개비 패턴과 타일 패턴

반이 될 것이다.

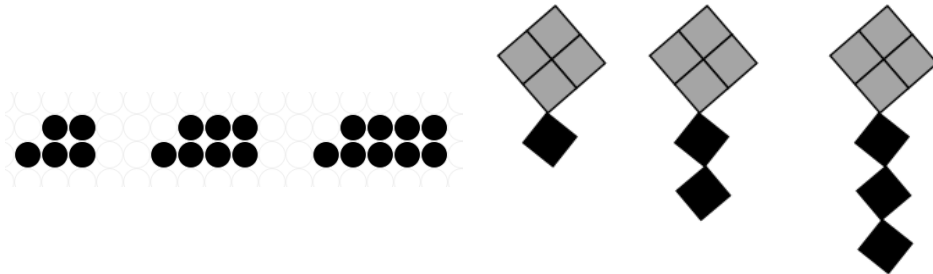
유형1



[그림 II -9] 유형1에 속한 패턴의 예시

A, AA, AAA, AAAA, AAAAA, ... 형태의 반복패턴이다. 1단계를 계속 이어 붙여서 이후의 단계를 생성할 수 있다. 이 유형의 패턴은 상대적으로 난이도가 낮아 주로 초등학생을 대상으로 하는 연구에서 사용되었으며(유미경, 류성림, 2013; 최지영, 방정숙, 2014), 일반식은 an 꼴로 표현된다.

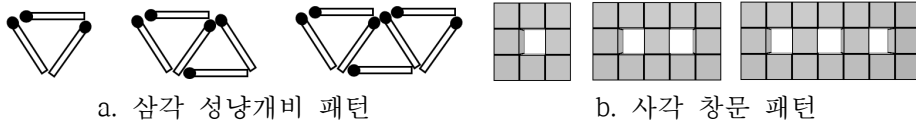
유형2



[그림 II -10] 유형2에 속한 패턴의 예시

1단계 A에 일정한 모양 B를 붙이는 방식으로 성장하는 패턴이다. 즉, A, AB, ABB, AB BB, AB BBB, ... 형태를 띈다. 1단계 A의 타일의 수를 b , 추가되는 모양 B의 타일의 수를 a 라 할 때 일반식은 $an+b(b \neq 0)$ 로 표현된다. Radford(2000), Rivera & Becker(2011) 등의 연구에서 사용되었다.

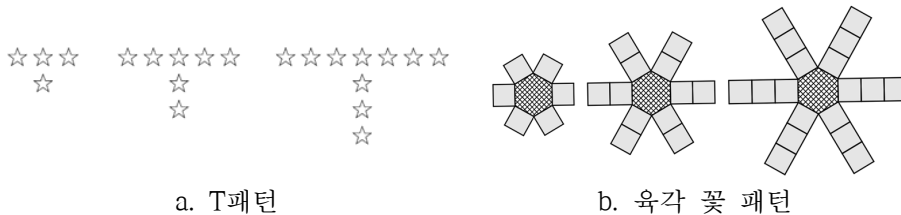
유형2-1



[그림 II-11] 유형2-1에 속한 패턴의 예시

이 유형의 패턴은 기본적으로 유형2와 동일한 A, AB, ABB, ABBB, ABBBB, ... 형태의 패턴이지만, 어떤 특정 기본도형을 반복적으로 생성하면서 성장한다는 차이가 있다. 예를 들어, [그림 II-11.a]의 왼쪽에서는 성냥개비가 정삼각형을 만들면서 성장하고, [그림 II-11.b]에서는 타일들이 정사각형 모양을 이루면서 성장한다. 다양한 방식으로 해석될 수 있기 때문에 여러 선행연구에서 주로 성냥개비를 소재로 사용되었으며(강현영, 2007; 유미경, 류성림, 2013; 이명기, 나귀수, 2012; 최병훈, 방정숙, 2012; Mavrikis et al., 2012; Noss et al., 1997; Radford, 2000; Samson & SCHÄFER, 2011), TIMSS 2003과 TIMSS 2007에서 대수 영역의 추이문항(성냥개비 문항, M032640)으로도 사용되었다.

유형3



[그림 II-12] 유형3에 속한 패턴의 예시

L 패턴, T 패턴, V 패턴 등이 모두 이 유형에 해당한다. 이 유형의 패턴은 불변하는 1개의 도형을 중심으로 n 개의 방향으로 기본도형이 1개씩 늘어나는 성장방식을 보인다. 예를 들어 [그림 II-12.a]의 패턴은 중앙의 별을 중심으로 3방향으로 1씩 자라는 패턴이고, [그림 II-12.b]는 중앙의 정육각형을 중심으로 6개의 방향으로 정사각형 타일이 1씩 자란

다. 이명기, 나귀수(2012), Barbosa & Vale(2015), Bishop(2000), Friel & Markworth(2009), Lee & Freiman(2006), Rivera, Knott, & Evitts(2007), Smith et al.(2007) 등의 연구에서 사용되었다.

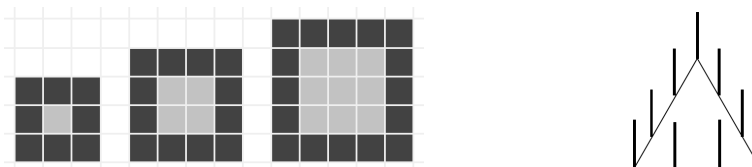
유형4



[그림 II-13] 유형4에 속한 패턴의 예시

1씩 성장하는 선분 형태의 부분들이 서로 한 점을 공유하면서 연결된 패턴이다. [그림 II-13.a]은 W형태로 연결되어 있으며, [그림 II-13.b] 패턴은 H형태로 연결되어 있다. 유형1~3과 달리 유형4는 $n-1$ 단계 그림이 n 단계에 시각적으로 포함되지 않는다. 특정 도형을 이루는 선분이 성장하는 형태이므로 단계가 증가할수록 닮은 도형이 성장하는 모습이 나타난다. Rivera(2007), Rivera & Becker(2011), Roebuck(2005)의 연구에서 사용되었다.

유형4-1

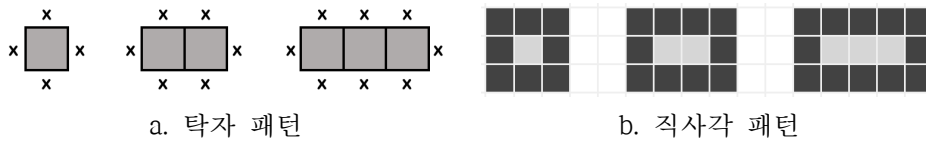


[그림 II-14] 유형4-1에 속한 패턴의 예시

유형4와 동일하게 1씩 성장하는 선분 형태의 부분들이 한 점을 공유하면서 모인 패턴으로 닫힌 구조로 연결되어 있다는 차이점이 있다. 이명기, 나귀수(2012), 정홍춘, 이경화(2008), Krebs(2003), Rivera &

Becker(2011), Steel(2008), Steele & Johanning(2004)의 연구에서 사용되었으며 TIMSS 2011의 대수 영역 문항(M032757, M032760A, M032760B, M032760C)으로도 사용되었다.

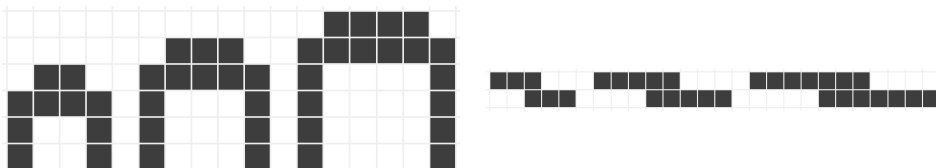
유형5



[그림 II-15] 유형5에 속한 패턴의 예시

유형5는 유형4-1와 유사하게 기본도형들이 닫힌 폐곡선 구조로 연결되어 있다. 그러나 유형5는 유형4, 유형4-1과는 달리 일부 선분만 성장한다는 차이가 있다. Lannin(2005)의 스티커 패턴도 이 유형에 해당한다. 이 유형의 패턴 역시 $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되지 않으며, 일부 방향으로만 증가하기 때문에 닳은 형태로 성장하지는 않는다. 닫힌 구조 내부에 포함된 매개물이 중요한 시각적 단서로 작용한다. 예를 들어 [그림 II-15.a], [그림 II-15.b]에서는 각각 정사각형 모양의 탁자와 내부의 타일이 시각적 단서의 역할을 한다. 양 끝 탁자에는 세 사람이 앉고, 나머지 탁자에는 두 사람씩 마주 보고 앉는다는 방식의 상황적 추론이 가능하다. Lannin(2003), Lannin(2005), Lannin et al.(2006a), Markworth(2010), Smith et al.(2007)의 연구에서 사용되었다.

유형6



[그림 II-16] 유형6에 속한 패턴의 예시

일부 연구에서 복잡도가 높은 선형 패턴으로 분류되어 사용된 유형이다. 2씩 성장하는 부분과 1씩 성장하는 부분이 결합 되어있다. $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되지 않는다. Chua & Hoyles(2014), Jurdak & El Mouhayar(2014)의 연구에서 사용되었다.

이상 선형 패턴의 8가지 유형을 정리하면 <표 II -2>와 같다.

<표 II -2> 구조적 특성에 따른 선형 패턴의 유형 분류

유형	예시	$n-1$ 단계의 n 단계 포함여부	답음 여부	선행연구
1		○	×	유미경, 류성림(2013), 최지영, 방정숙 (2014), Markworth(2010)
2		○	×	Radford(2000), Rivera & Becker(2011)
2-1		○	×	강현영(2007), 유미경, 류성림(2013), 이명기, 나귀수(2012), 최병훈, 방정숙 (2012), Mavrikis et al.(2012), Radford(2000), Rivera et al.(2007), Samson & Schafer(2011).
3		○	○	이명기, 나귀수(2012), Barbosa & Vale(2015), Bishop(2000), Friel & Markworth(2009), Lee & Freiman(2006), Sasman et al.(1999), Smith et al.(2007)
4		×	○	Rivera(2007), Rivera & Becker(2011), Roebuck(2005)
4-1		×	○	이명기, 나귀수(2012), 정홍춘, 이경화 (2008), Krebs(2003), Rivera & Becker(2011), Steel(2008), Steele & Johanning(2004)
5		×	×	Lannin(2003), Lannin(2005), Lannin et al.(2006a), Markworth(2010), Smith et al.(2007)
6		×	○	Chua & Hoyles(2014), Jurdak & El Mouhayar(2014)

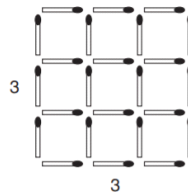
2.2. 도형 패턴 과제의 구성

2.2.1. 사례로 제시되는 단계의 수

대부분의 선행연구에서는 도형 패턴의 단계를 순차적으로 3~5개 제시한다(e.g. 이명기, 나귀수, 2012; Radford, 2000; Rivera et al., 2007). 그러나 일부 연구(정홍춘, 이경화, 2008; Küchemann, 2010; Lannin, 2005; Noss et al., 1997; Steel, 2008; Steele & Johanning, 2004)에서는 특정 한 단계만을 제시하는 도형 패턴 과제가 사용되었다.

Küchemann(2010)은 도형 패턴을 순차적으로 제시하는 방식이 학생들을 패턴의 구조보다는 수치적인 경험적 관계에 집중하게 만드는 경향이 있다고 주장하면서 [그림 II-17]와 같이 특정 한 단계의 패턴만 제시하는 것이 학생들의 구조적 접근을 돕는다고 하였다. Noss et al.(1997) 역시 한 단계만 제시하는 것이 학생들이 단계와 패턴 사이의 함수적 관계에 집중할 수 있도록 유도하는 효과가 있다고 주장하였다. 그러나 패턴의 구조에 따라 <표 II-2>의 유형4나 유형6과 같은 경우 그 성장방법을 한 단계의 그림만 가지고 설명하는 것은 쉽지 않다. 오히려 성장방법을 설명하는 과정에서 학생들이 스스로 발견해야 할 단서를 제시해버릴 가능성이 있다. 초등 저학년을 대상으로 하는 연구에서 1단계, 2단계는 무시한 채 3단계의 특성만을 고려하여 일반화하는 경향이 보고되었다는 점을 보았을 때(Rivera, 2010b), 패턴의 유형과 학생의 수준을 고려하여 사례로 제시하는 단계의 수를 결정할 필요가 있다.

This is a 3 by 3 square of matchsticks.
How many matchsticks are needed for
• a 20 by 20 square
• an n by n square?



[그림 II-17] 성냥개비 이차 패턴(Küchemann, 2010, p. 242)


2.2.2. 질문의 유형 및 순서


학생들의 일반화 과정 및 전략은 패턴의 특성뿐 아니라 함께 제시되는 질문에 영향을 받는다(Lannin et al., 2006a; Noss et al., 1997). Moss & McNab(2011)은 패턴 활동을 재구성하여 수업한 결과 학생들이 선행연구에서 공통적으로 나타났던 재귀적 접근을 거의 하지 않도록 할 수 있음을 보인 바 있다.


Stacey(1989)는 선형 패턴 과제를 몸 풀기(warm-up) 문제, 근 일반화(near generalization) 문제, 원 일반화(far generalization) 문제로 구성하였다. 몸 풀기 문제는 주어진 패턴의 바로 다음 단계나 다다음 단계의 도형의 수를 묻는 것으로 학생들이 도형 패턴에 익숙해지도록 돕기 위한 것이다. 근 일반화 문제는 단계적으로 그림을 그리거나 개수를 세어서 해결할 수 있는 것으로 보통 10 또는 20단계에서의 도형의 수에 대해 묻는다. 원 일반화 문제는 단계별 접근 방법으로 해결할 수 없는 100단계 이상에서의 도형의 개수를 물음으로써 일반화를 유도하는 것이다. 몸 풀기 문제와 근 일반화 문제가 산술적인 차원의 질문이라면 원 일반화 문제는 일반화를 요구하는 질문이다. 근 일반화와 원 일반화에 대한 기준은 연구자마다 조금씩 다른데, 예를 들어 Rivera(2013)의 경우는 1~9단계까지를 근 일반화, 10단계 이상을 원 일반화로 구분하였다. 이후 대부분의 선행연구에서는 몸 풀기 문제→ 근 일반화 문제→ 원 일반화 문제 순서로 패턴 일반화 과제를 구성하였는데(e.g. Amit & Neria, 2008; Jurdak & El Mouhayar, 2014), 일반적으로 <표 II-3>과 같이 사례로 주어진 패턴의 바로 다음 단계를 물은 후 10~50단계 중 한 가지를 질문하고 100단계를 질문하거나 n 단계를 질문한다.


교실에서의 패턴 활동은 <표 II-3>와 같이 “~ 몇 개인가?” 라는 질문을 통해 바로 수치적인 측면에 대해 묻는 경우가 일반적이다(Lee & Freiman, 2006). 우리나라 중학교 교과서 속 패턴 문제도 대부분 “~ 몇 개인가?” 라는 질문으로 구성되어 있다(e.g. 박교식 외, 2017; 황선욱 외, 2017). Blanton & Kaput(2004)은 이러한 전형적인 질문 방식이 패턴의 가

<표 II -3> 패턴 일반화 과제의 예(Jurdak & El Mouhayar, 2014)

Step 1


Step 2


Step 3


Step 4


- 1) 5단계 그림에 있는 타일의 수는 몇 개인가? 답을 어떻게 구했는지 설명하시오.
- 2) 9단계 그림에 있는 타일의 수는 몇 개인가? 답을 어떻게 구했는지 설명하시오.
- 3) n 단계 그림에 있는 타일의 수는 몇 개인가? 답을 어떻게 구했는지 설명하시오.

능성을 제한한다고 지적하였고 Friel & Markworth(2009)도 도형적 추론을 소홀히 하게 할 가능성이 있는 질문 방식이라고 하였다. 학생들로 하여금 수치적인 관계에만 주목하게 만들 수 있기 때문이다.

이에 몇몇 연구자들은 학생들의 도형적 추론을 촉진하기 위한 질문의 구성 방법에 대해 제안하였다. Mason(1996)은 도형수 패턴의 일반화에서 첫 번째 접근 방법으로 시각화를 이야기하였다. Thornton(2001)은 학생들에게 패턴을 직접 구성하게 하고 그것에 대해 수치적인 측면이 아닌 내재된 물리적 구조의 관점에서 설명하도록 요구하는 것이 건설적인 패턴 활동을 유도한다고 주장하였다. Billings(2008)는 초등교사들의 의미 있는 패턴 활동을 돕는 수단 중 하나로 패턴 그리기를 제시하였다. 그의 패턴 과제에서 가장 첫 질문은 다음 단계를 직접 그리도록 요구하는 것이다. 다음 질문은 특정 그림을 주고, 해당 그림이 주어진 패턴에 부합하는지를 물으면서 의도적으로 교사들이 패턴의 물리적 구조를 분석하게 한다. 그리고 10단계를 그리는 방법을 설명하게 한 후 수치적인 측면의 질문을 이어간다. 그는 이러한 초기의 질문들이 교사들이 이후의 수치적인 질문들에서 패턴의 물리적 구조를 활용하도록 자극했다고 주장하였다. Rivera(2008)는 시각화 경로를 통한 대수적 일반화를 촉진하기 위하여 패턴을 그리고 설명하는 질문으로 과제를 시작하였다. 국내에서도 일부 연구에서 초기의 질문을 다음 단계를 그리고 규칙을 설명해보게 한 후 20번째보다 큰 단계를 임의로 하나 골라 그리고 설명하는 활동으로 구성하

〈표 II -4〉 패턴 일반화에서 도형적 추론을 돕기 위한 발문(Friel & Markworth, 2009, p. 28.)

<p>국면1: 시각적 특성을 사용하여 도형적으로 추론하기</p>	<ol style="list-style-type: none"> 이 그림에서 몇 개의 서로 다른 패턴을 찾을 수 있는가? <ol style="list-style-type: none"> 다음 단계를 어떻게 그릴 수 있는가? 10단계를 어떻게 그릴 수 있는가? 58단계를 어떻게 그릴 수 있는가? 다른 사람에게 임의의 단계를 그리는 방법을 어떻게 설명할 것인가?
<p>국면2: 수치적 관계를 개발하여 함수로 일반화하기</p>	<ol style="list-style-type: none"> 10단계, 58단계, 100단계를 만드는데 각각 몇 개의 스마일이 필요한가? n 단계를 만드는데 몇 개의 스마일이 필요한가? n 단계에 대한 표현 중 어떤 것이 바른 것인가?
<p>국면3: 확장하기</p>	<ol style="list-style-type: none"> 정확히 100개의 스마일로 구성된 단계는 몇 단계인가? 50개의 스마일로 구성된 단계는? 학급 친구들을 위해 패턴 문제를 만들어보자.

였다(이명기, 나귀수, 2012; 유미경, 류성림, 2013).

Lee & Freiman(2006)은 도형 패턴의 일반화 과제에서 도형적 추론을 강조하기 위한 발문에 대한 가이드라인을 제시하였는데, Friel & Markworth(2009)는 이러한 발문을 활용하여 학생들이 시각적 추론으로부터 시작하여 함수적 관계를 발견할 수 있도록 돕는 질문들을 〈표 II -4〉와 같이 단계별로 제시하였다. 국면1에서는 “어떻게 그릴 수 있는가?”라는 질문을 통해 학생들이 시각적 특성에 주의를 기울일 수 있게 하고, 국면2에서는 “몇 개 ~ 필요한가?”라는 질문을 통해 수치적 관계에 집중하게 함으로써 함수로의 일반화를 돕는다. 이들은 이러한 질문들이 학생들이 패턴으로부터 대수적으로 유의미한 구조를 찾고 함수적 관계로 일반화하는 데 도움을 줄 수 있다고 하였다.

Wilkie & Clarke(2016)는 과제의 초기 질문에서 학생들에게 패턴의 구조와 성장방식에 대한 자신의 이해를 여러 가지 색을 이용하여 패턴을 색칠하는 방법을 통해 보여줄 것을 요구하였다. 이러한 활동은 학생들로

하여금 일반성과 함수적인 관계에 주목하게 하는 효과가 있었으며 연구자에게는 학생들의 시각적 사고를 관찰하는 기회를 제공하였다.

한편, 일부 연구자들은 학생들이 잘못된 일반화 전략에 빠지지 않도록 발문을 설계하였다. 예를 들어, Sasman et al.(1999)는 5단계, 20단계, 100단계와 같이 배수 형태로 질문을 구성하는 것이 학생들이 잘못된 비율전략을 사용하게 유도할 수 있으며 19단계, 59단계와 같이 서로 나누어지지 않는 소수의 단계를 질문하는 것이 학생들의 비례전략 사용을 방지하는 효과가 있음을 보였다. 이후 많은 연구들이 서로 나누어지지 않는 단계를 묻는 형식으로 과제를 구성해왔다(e.g. 최병훈, 방정숙, 2012; Jurdak & El Mouhayar, 2014). Markworth(2010)와 Warren & Cooper(2008)는 도형 패턴의 각 단계 및 단계의 수 즉, 색인을 숫자로 표시해주는 것이 학생들이 함수적 관계를 찾는데 도움을 준다고 하였다. Noss et al.(1997)은 학생들이 재귀적 접근에 집중하는 것을 방지하기 위하여 패턴의 단계를 연속적이지 않게 제시할 것으로 제안하기도 하였다.

3. 도형 패턴의 일반화 과정

3.1. 시각적 추론

추론의 대상(문제) 자체가 시각적 정보나 장치를 포함하고 있는 경우, 또는 추론의 과정에서 여러 가지 시각적 장치나 표상 체계를 포함하는 경우를 시각적 추론이라 한다(이종희, 김선희, 김부미, 김기연, 2017). 도형 패턴은 도형적 추론을 바탕으로 일반화할 때 대수적 사고의 다양한 측면을 경험할 수 있으며(Noss et al., 1997; Rivera, 2010a; Steel, 2008), 도형적 추론은 도형 패턴으로부터 관계적 구조를 시각적으로 도출하는 것과 관련된 것이므로 도형 패턴 일반화에서 시각적 추론은 중요한 역할을 한다.

도형 패턴의 일반화에서 시지각(visual perception)은 가장 중요한 지각 유형 중 하나이다(Rivera, 2010a, p. 298). Dretske(1990)은 시지각을 감각적 지각과 인지적 지각의 두 가지 유형으로 구분하였다. 감각적 지각은 사물 자체를 단순한 대상으로 간주하는 경우이며, 인지적 지각은 감각을 넘어서 대상과 관련된 사실 또는 성질을 보거나 인식하는 것이다.

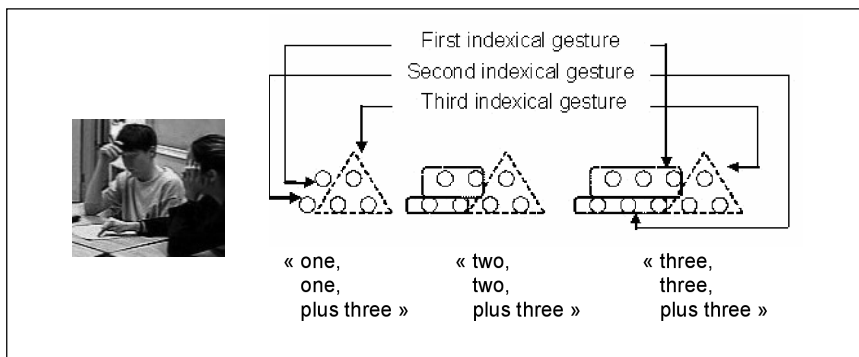
Duval(1995)은 도형을 게슈탈트 법칙의 무의식적 통합에 의해 결정된 형태로 이해하는 것을 지각적 이해라 하였다. 그는 기하 문제에서 도형의 지각적 특징에서 벗어나지 못하는 학생들은 증명 과정의 발견에 필요한 수학적 성질을 도형으로부터 도출할 수 없다고 지적하였다. Duval(1999)은 도형에 대한 이해가 지각적 수준에 머물러 있는 것을 ‘발견적 결함(heuristic deficiency)’ 이라고 명명했다. Samson & SCHÄFER(2011)는 지각적 이해만으로는 도형 패턴의 일반화에 필요한 게슈탈트를 일으키지 못할 수 있다고 주장하면서, 지각적 이해 너머로의 이동이 있어야 패턴을 다양한 방식으로 볼 수 있다고 하였다.

Lee(1996) 역시 패턴을 보는 것(seeing a pattern)이 문제가 아니라, 대수적으로 유용한 패턴을 인식하는 것(perceiving a pattern)이 중요한 문

제라고 이야기하면서 단순히 보는 것(seeing)과 인지적인 인식(perceiving)을 구분하였다. 특히 Lee는 패턴을 몇 가지 구조로 볼 수 있고, 그 중에서 대수적으로 유용하지 않은 것을 배제하는 능력의 중요성을 강조하면서 학생들에게 하나의 패턴을 인식하는 것이 아니라 여러 가지의 패턴들을 인식하는 것과 지각적 유연성(perceptual agility)을 가르쳐야 한다고 주장하였다.

Radford, Bardini, & Sabena(2007)는 일반화 개념을 특수한 것들로부터 일반적인 것을 볼 수 있도록 하는 주의의 전환으로 설명하였다. 그들은 일반화를 무언가를 명확하게 만드는 대상화(objectification)의 과정으로 보았다. 일반적인 의자를 바라볼 때 우리가 개념적 대상이나 개념적 관계를 볼 수 없기 때문에, 여기서 대상화는 학생들이 무언가를 의식적으로 인식할 수 있는 가능성과 관계된다. 즉, 대상화는 감각적 지각을 넘어 인지적인 지각으로부터 출발할 수 있다. 이들은 9학년 학생들의 소규모 그룹 활동 형식의 패턴 일반화 과정을 기호학적 관점에서 세부적으로 분석하였다. [그림 II-18]와 같이 학생들은 일반화 과정에서 패턴을 공간적으로 “상단”과 “하단”으로 구분하여 지칭하거나 제스처를 이용하여 패턴을 동일한 공간적 구조로 분해하였는데, 이러한 공간적 지시의 출현이 특수와 일반 사이의 중요한 중심축이라 하였다.

Rivera(2007) 역시 대수적인 일반화를 하기 위해서는 패턴이 일상 속의



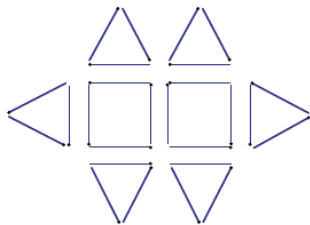
[그림 II-18] 패턴의 공간적 분할에 대한 제스처(Radford et al., 2007, p. 521)

단순한 그림이 아님을 깨닫고 대수적으로 유용한 패턴을 시각적으로 인식할 수 있어야 한다고 강조하였다. 실제로 원으로 구성된 삼각수(triangular number) 패턴에서 패턴을 단순히 원의 집합으로 보는 아동들은 원을 일렬 또는 두 줄로 나열하지만 패턴을 구성하는 원의 공간적인 특성이나 수량적인 특성을 인지적으로 지각한 학생은 원을 삼각형 형태로 배열하며 패턴을 확장할 수 있다(Rivera, 2011).

이상의 선행연구에서 도형 패턴의 일반화와 관련하여 공통적으로 강조하는 시각적 추론은 도형을 단순히 지각하는 것이 아니라 특정 의도를 가지고 공간적으로 분해해야 한다는 것, 그리고 다양한 방식으로 패턴을 분해하면서 그중에 대수적 일반화와 연결될 수 있는 방식을 선택하는 것이다.

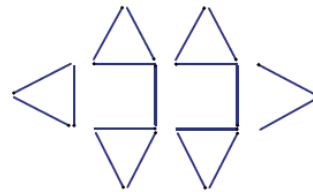
이에 일부 연구자들이 학생들이 패턴의 구조를 어떻게 이해하고 대수

$$T_n = 4n - (n-1) + 3(2n) + 6 - (2n+2)$$



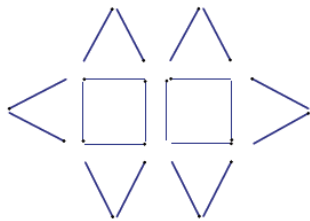
a. 지각적 이해

$$T_n = 7n + 5$$



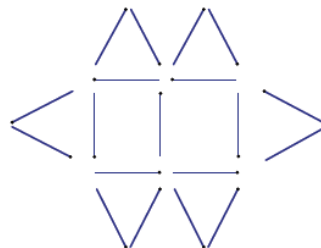
b. 절차적 이해

$$T_n = 4n - (n-1) + 2(2n+2)$$



c. 담론적 이해

$$T_n = 2n + (n+1) + 4n + 4$$



d. 조작적 이해

[그림 II -19] 도형 패턴 이해의 네 가지 관점(Samson, 2010)

적 표현하는지에 대해 분석하였다(Chua & Hoyles, 2010; Samson, 2010; Rivera, 2010a). Duval(1995)은 기하에서 도형에 대한 이해 방법을 ‘지각적 이해(figural apprehension)’, ‘절차적 이해(sequential apprehension)’, ‘담론적 이해(discursive apprehension)’, ‘조작적 이해(operative apprehension)’의 네 가지로 분류하였다. Samson(2010)은 Duval(1995)의 이론을 토대로 도형 패턴의 이해 유형을 [그림 II-19]와 같이 구분하였다. [그림 II-19]의 지각적 이해에서는 게슈탈트의 폐쇄성의 법칙과 좋은 형태의 법칙에 의해 주어진 패턴을 삼각형과 사각형의 조합으로 세분화한다. 이러한 접근은 복잡한 대수 표현으로 연결될 가능성이 있으며 겹치는 성냥개비를 고려해야 한다. 절차적 이해는 다음 단계를 구성하기 위해서는 7개의 성냥개비로 구성된 단위 도형의 추가 삽입이 필요하다는 점을 인식하는 것이다. 이것은 대수적 표현으로 바로 연결될 수 있다. 또한 “2개의 사각형에 대해 총 19개의 성냥개비가 필요하다”라는 진술과 연관되어 중앙의 사각형들이 부각되는 방식으로 담론적 이해가 출현할 수 있다. 정사각형을 세고 중복된 성냥개비를 조정한 후 나머지 둘레에 V자 모양의 성냥개비를 세는 대수적 표현과 연결될 수 있다. 마지막으로 조작적 이해는 주어진 도형을 수평선, 수직선, 위아래의 V모양 및 양쪽 끝 각각에 위치한 2개의 성냥개비로 볼 수 있게 한다.

Rivera(2010a)는 중학생을 대상으로 하는 연구를 통해 패턴 일반화에서 사용되는 도식의 존재를 확인하였는데, 이를 시각적 템플릿²⁾이라는 개념으로 설명하였다. 그는 시각적 템플릿을 ‘덧셈 템플릿’, ‘곱셈 템플릿’, ‘실용적 템플릿’으로 구분하였다. 덧셈 템플릿은 <표 II-4>의 역 T 패턴을 $n+n+n+1$ 과 같이 일반화하는 것으로 패턴을 일정하게 반복적으로 더해나가는 것을 말한다. 반면 곱셈 템플릿은 역 T 패턴을 $3n+1$ 과 같이 일반화하는 것으로 1개짜리 타일로 구성된 길이 n 인 부분이 다

2) 원래 시각적 템플릿이라는 용어는 Giaquinto(2007)가 구조를 이해하는 시각적 인지의 일종으로 도입한 것이다. 그러나 Rivera(2010a)는 시각적 템플릿을 패턴 인식 맥락의 ‘템플릿 매칭’ (Neisser, 1976)과 유사한 속성을 가진 보다 일반적인 것으로 정의하여 사용하였다.

시 2개 있다는 것을 동시에 인식하는 것이다. 곱셈 템플릿을 사용하면 패턴의 동일한 부분을 그룹화하여 해석할 수 있으므로 덧셈 템플릿보다 더 높은 수준의 사고가 가능하다.

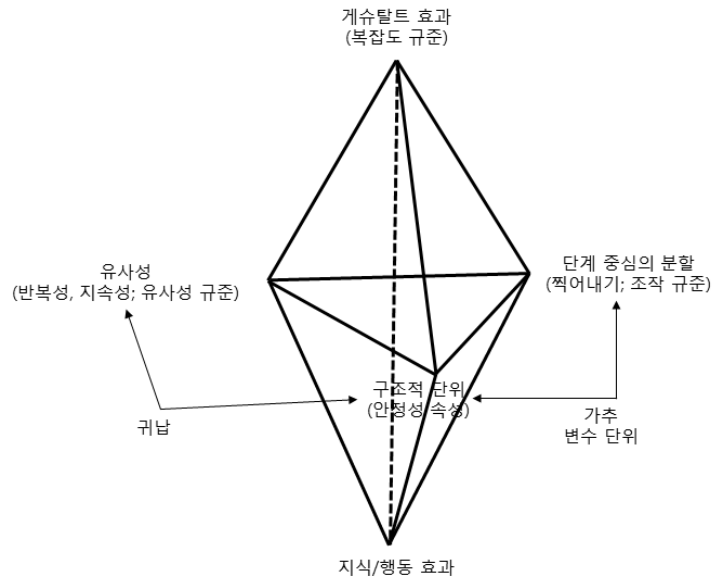
Rivera는 시각적 템플릿이 Davis(1984)의 VMS(visually-moderated sequences)처럼 불확실한 상황에서 벗어나기 위한 길잡이 역할을 한다고 주장하였다. 여기서 VMS란 시각적 단서 V_1 이 절차 P_1 을 이끌어내고, 절차 P_1 의 수행이 다시 시각적 단서 V_2 를 생산하고, V_2 가 다시 절차 P_2 를 이끌어내는 순차적인 문제 해결 과정을 의미한다(Davis, 1984). 예를 들어, [그림 II-20]와 같이 이차방정식을 인수분해 할 때, 방정식 바로 밑에 괄호를 2개 치고 x , 상수항 등을 순차적으로 쓰고 생각하고를 반복하면서 인수분해하는 과정은 VMS의 한 예가 될 수 있다(Arcavi, 2003).

$ \begin{array}{ccccccc} x^2 - 20x + 96 & \rightarrow & x^2 - 20x + 96 & \rightarrow & x^2 - 20x + 96 & \rightarrow & x^2 - 20x + 96 \\ (\quad)(\quad) & & (x \quad)(x \quad) & & (x - \quad)(x - \quad) & & (x - 12)(x - 8) \end{array} $

[그림 II-20] 인수분해에서 VMS의 사례(Arcavi, 2003, p. 224)

또한 시각적 템플릿은 학습자를 의미 있는 패턴의 분할에 참여시킴으로써 분명하게 드러나지 않는 관계 및 개념적 구조에 의한 추상적 세계를 볼 수 있게 돕는다고 주장하였다(Rivera, 2010a). 그는 11명의 학생에 대한 임상 면담을 통해 시각적 템플릿에 대한 3차원 인지 모델을 [그림 II-21]와 같이 제시하였다. 그의 모델에서 시각적 템플릿은 분산되고 동적으로 내재된 방식으로 작동하는 다섯 가지 속성 - 구조적 단위(structural unit), 유사성(analogy), 단계 중심의 분할(stage-driven grouping), 게슈탈트 효과(gestalt effect), 지식/행동 효과(knowledge/action effect)으로 구성된다.

게슈탈트 효과는 게슈탈트의 법칙을 의미하는 것으로, 이 법칙은 사람이 형태를 인지하는 방법에 대한 기초원리를 제공한다. 우리는 일반적으로 근접한 것, 유사한 것, 닫힌 모양을 이루는 것, 연속적인 것, 좋은 모



[그림 II -21] 시각적 템플릿에 대한 3차원 인지 모델(Rivera, 2010a)

양을 만드는 것끼리 통합하여 지각하려는 경향이 있다(Metzger, 2006). 따라서 형 우수성³⁾이 높은 도형 패턴은 규칙적이고 균형 잡힌 조화로운 패턴의 형태를 반영하는 해석된 구조를 갖는 경향이 있어 학습자가 대수적으로 유용한 구조를 쉽게 찾을 수 있게 한다. 반면 형 우수성이 낮은 패턴은 쉽게 식별할 수 있는 부분이 없거나 자연스럽게 나누어지지 않는 부분을 가지고 있어서 대수적으로 유용한 공식을 찾기 어렵게 만든다(Rivera, 2011).

지식/행동의 효과는 형 우수성과 관련이 있다. 예를 들어 형 우수성이 높은 경우 지식/행동에 의한 중재의 필요성이 줄어든다. 그러나 반대의 경우 해석된 패턴의 구조를 친숙하게 만드는 방법에 대한 추가적인 지식(예: 연결전략)이나 도형과 관련된 행동(예: 도형의 배열을 변형하기)이 필요하다.

구조적 단위는 각 단계 및 여러 단계에서 해석된 일반적인 특징과 관

3) 형 우수성(figure goodness)의 요소는 단순성, 규칙성, 대칭성, 기억의 용이성 등이 포함된다(Metzger, 2006). 따라서 형 우수성이 높다는 것은 단순하고 기억하기 쉽고 익숙하며 대칭적이고 균형 있는 모양을 의미한다.

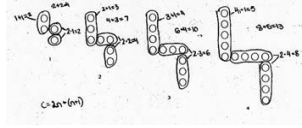
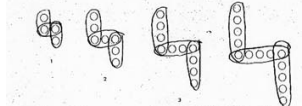
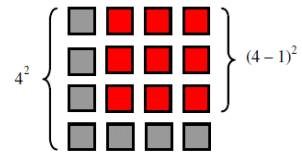

련된다. 그것은 구성된 단위에 의미를 부여하고 불변과 변화의 문제를 다룬다. 따라서 패턴의 형태나 속성 또는 관계의 안정성에 관한 것이다.

유사성은 패턴을 이루는 부분들 사이의 반복성 및 일관성에 관한 것이다.

단계 중심의 분할은 “단계의 수 만큼씩 패턴을 분할”, “단계의 수로 이루어진 x 개의 열”, “총 단계의 수개의 그룹으로 분할”과 같이 단계의 수를 이용하여 패턴을 분할하는 것이다. 이는 새롭게 출현하는 템플릿의 내용을 구성하고 결과적으로 모든 단계에서 수행되는 그룹화 행동의 절차에 반영된다.

Rivera(2011)는 시각적 템플릿의 작용을 통해 최종적으로 패턴의 구조가 해석되는 유형에 따라 패턴 일반화를 <표 II-5>와 같이 구성적 일반

<표 II-5> 패턴의 구조가 해석되는 유형에 따른 패턴 일반화의 분류
(Rivera, 2011)

일반화의 유형	시지각 특징	예
구성적 일반화 (constructive generalization)	패턴을 겹치지 않는 부분들의 합으로 인식	 $C_n = 2n + (n+1)$
해체적 일반화 (deconstructive generalization)	패턴을 편리하게 분해될 수 있는 겹치는 부분들의 합으로 인식	 $C_n = 3(n+1) - 2$
보조에 의한 일반화 (auxiliary-driven generalization)	잘 알려져 있거나 보다 단순한 구조를 가진 더 큰 도형의 맥락에서 패턴을 인식	 $T_n = n^2 - (n-1)^2$
변환 기반 일반화 (transformation-based generalization)	주어진 패턴을 이동, 재구성, 변환 등을 통해 보다 친숙한 구조로 바꾸어 인식	 $T_n = n(n-1) + 1$

화(constructive generalization), 해체적 일반화(deconstructive generalization), 보조에 의한 일반화(auxiliary-driven generalization), 변환 기반 일반화(transformation-based generalization)로 나누어 설명하였다.

일반적으로 학생들은 구성적 일반화를 하려는 경향이 강하다(English & Warren, 1998; Rivera & Becker, 2008). Chua & Hoyles(2010)는 27명의 중등 예비교사가 2차 패턴의 일반화에서 상황적 이해 전략을 사용할 때 사용하는 시각적 도식의 유형을 조사하였다. 연구 참여자들의 시각적 도식은 가법적 구성(additive constructive), 비가법적 구성(non-additive constructive), 재구성(reconstructive)의 3가지 유형으로 분류할 수 있었는데, 이는 각각 Rivera의 구성적 일반화, 해체적 일반화, 변환 기반 일반화에 해당하는 것이었다. 그들의 연구에서도 연구 참여자의 50% 정도는 구성적 일반화를 사용하였고, 30% 정도가 변환 기반 일반화를 사용하였으며, 10% 정도만이 해체적 일반화를 사용하였다.

Wilkie & Clarke(2016)는 초등학교 6학년 학생들에게 T 패턴을 구성하는 부분들을 서로 다른 색으로 색칠하게 함으로써 그들이 패턴의 구조를 시각적으로 인식하는 방법에 대해 조사하였다. 그 결과 재귀적으로 패턴을 인식하는 유형이 제일 많았으며, 여러 가지 구성적 일반화 중에서도 1개의 원을 중심으로 3개의 길이 n 인 부분이 붙어있는 방식으로 구조를 인식한 경우가 일반식을 성공적으로 구할 가능성이 높았다.

3.2. 패턴 일반화와 가추, 귀납

전통적으로 수학적 추론은 연역과 귀납 두 가지로 구성되며, 연역이 아닌 모든 수학적 추론은 귀납으로 간주되었다(Magnani, 2005). 그러나 기호학자 Peirce(1839-1914)는 가설을 생성하는 논리로서 가추(abduction)를 귀납(induction)으로부터 분리하였다. Peirce는 규칙(rule), 사례(case), 결과(result)를 이용하여 가추를 삼단논법을 이용하여 다음과 같이 설명하였다(CP 2.623).

규칙: 이 가방에서 나온 모든 콩은 하얗다

결과: 이 콩들은 하얗다.

사례: 이 콩들은 이 가방에서 나왔다.

이러한 정의에서 가추적 추론의 결과로써 얻어지는 사례는 어떤 규칙을 선택하느냐에 따라 결정된다고 할 수 있다. 예를 들어, 위 사례에서 “썩은 콩은 하얗다” 라는 규칙을 적용하면, “이 콩들은 썩었다” 라는 사례를 가추의 결과로 얻는다. 이에 Eco(1983)는 Peirce의 이러한 정의를 기초로 가추를 사례가 따라야 할 규칙을 찾는 추론의 과정으로 해석하였다. 그는 규칙이 자동적인 수준으로 유일하게 결정되는 가추를 과대 코드화된 가추, 2개 이상의 규칙이 선택가능한 상황에서의 가추를 과소 코드화된 가추, 기존에 없던 새로운 규칙을 창조하여 적용하는 추론을 창조적 가추라 정의하였다. 이러한 Eco의 분류는 가추의 유형을 구분하는 좋은 기준이 된다.

한편, Peirce는 후기에 가추의 기능을 강조하여 다시 삼단논법을 이용하여 다음과 같이 설명하였다(CP 5.189).

놀라운 사실(surprising fact) C가 관찰되었다(C).

그러나, 만약 A가 참이라면, C는 당연히 참이다($A \rightarrow C$).

따라서, A가 참이라고 의심할만한 이유가 있다(A).

가추는 관찰된 결과(어떤 놀라운 사실)를 설명하기 위한 가설의 생성과 특정 가설에 대한 선호를 포함하는 추론이다(CP 7.202). 가추의 결과로 생성된 가설은 그럴듯한 것일 뿐 확실하지 않으며 실험을 통해 검증되거나 반박될 수 있다. 이에 Peirce는 가설을 기초로 한 추측을 실험을 통해 검증하는 추론으로 귀납을 정의하고(CP 7.206), 연역은 채택한 가설로부터 얻어낼 수 있는 경험적 결과들을 추적하는 추론으로 정의하였다(CP 7.203). 그는 과학의 모든 아이디어가 가추로부터 출발한다고 주장하며(CP 5.145), 가추, 귀납, 연역을 통해 과학적 지식의 출현과 성장을 설

명하고자 하였다.

최근 수학 교육에서도 수학적 추론의 새로운 양식으로써 가추에 주목하고 있으며 기하(양은경, 신재홍, 2014; Pedemonte & Reid, 2011), 문제 해결(Cifarelli, 1999), 대수(Reid, 2003; Rivera & Becker, 2007), 수학적 모델링(백도현, 이경화, 2019)의 측면에서 수행된 연구들은 가설의 생성, 추론, 정당화, 일반화와 관련하여 가추의 중요성을 확인하였다.

Reid(2003)는 중학생이 n 명의 사람이 모두 1번씩 악수를 했을 때 전체 악수의 횟수를 구하는 문제를 해결할 때 가추가 사용됨을 설명하였다. 그는 학생 Jason이 $n=26$ 일 때의 악수 횟수가 $26 \times (26/2) - (26/2)$ 이라는 사례로부터 n 명의 악수횟수가 $n \times \frac{n}{2} - \frac{n}{2}$ 라는 일반식을 추측할 때 가추적 추론이 사용된다고 하였는데, 이를 Peirce 초기 가추의 정의(Peirce, 1867)를 이용하여 다음과 같이 설명하였다(Reid, 2003, p. 7).

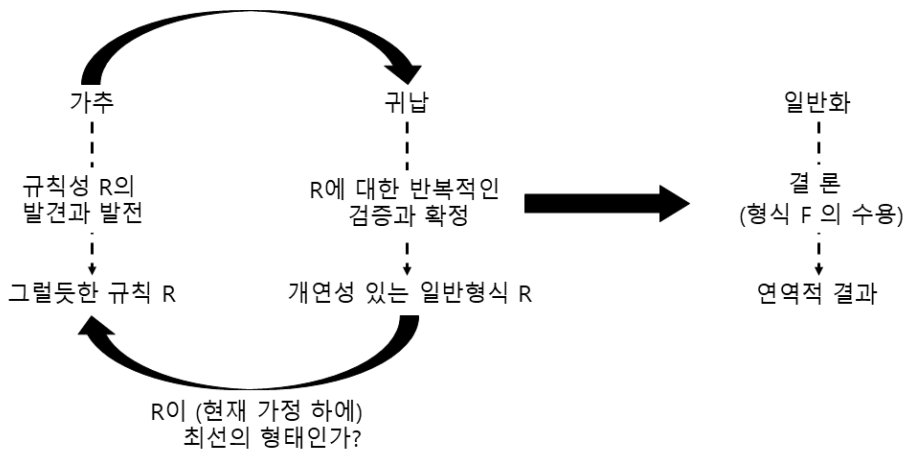
$H(n)$ 에 대한 공식은 n 인 경우에 대한 답을 제공해야 한다.

$26 \times (26/2) - (26/2)$ 은 26인 경우에 대한 답을 제공한다.

$n \times \frac{n}{2} - \frac{n}{2}$ 이 아마도 $H(n)$ 의 공식일 것이다.

Rivera & Becker(2007) 역시 Peirce의 관점에 기초하여 일반화 과정 안에 가추와 귀납 두 가지 추론이 모두 관여하며 유한한 사례들(도형, 숫자 또는 일상적인 대상)로부터 지식을 일반화하는 데 중요한 역할을 한다고 주장하였다. 그는 사례로 제시된 패턴의 불완전한 정보를 토대로 일반화된 규칙을 생각해 내는 추론이 가추이며, 그러한 일반화 규칙을 반복적인 검증을 통해 확정하는 추론을 귀납이라고 하였다. 가추로부터 생성된 일반식의 개연성을 확장해서 귀납을 통해 검증한다는 점에서 가추와 귀납은 패턴 일반화에서 상호보완적으로 작용한다.

그는 패턴 일반화를 [그림 II-22]와 같이 가추 단계와 귀납 단계의 나선적인(spiral) 과정으로 설명하였다(Rivera, 2008, p. 22). 가추의 결과로 생성된 일반식은 오류 가능성이 있는 감정적 가설이므로 생존가능성을



[그림 II-22] 선형 패턴 일반화에서의 가추-귀납적 추론 과정(Rivera & Becker, 2007)

검증하는 귀납의 과정을 통과하지 못하면, 다시 새로운 규칙이 가추되며 동일한 과정이 반복된다. 따라서 그의 관점에서 패턴 일반화는 불완전한 가추적 가설이 완전한 가추적 가설로 진화하는 과정이다(Rivera & Becker, 2007). 이때 가설은 점진적으로 개선되는 경우도 있지만, 재귀적인 규칙이 함수적인 규칙으로 전환되듯 불연속적이거나 이전의 가설과 연관이 없는 새로운 가설이 등장하는 경우도 있다.

Rivera & Becker(2007)는 가추가 각 개인의 사전경험 및 지식에 따라 다양한 형태로 나타날 수 있다고 보았는데, 변수 n 에 대한 이해가 부족한 연구 참여자가 수열의 계차가 2라는 성질을 이용하여 $n+2$ 라는 일반식을 주장하는 것 역시 가추로 보았다.

한편, 많은 연구자들은 단순한 추측과 가추를 이론적으로 구분하고자 하였다. Hoffmann(1999)은 가추는 추론적 차원과 휴리스틱 차원을 모두 포함한다고 하였다. Rivera(2008)는 만약 가추가 단순히 새로운 가설을 생성하기 위한 휴리스틱 전략으로 해석된다면, 이는 가추가 갖는 독특한 개념적 성격이 훼손되는 것이라고 하였다. 그는 +2 라는 재귀적인 규칙을 가추한 학생이 100단계를 세기 위하여 ‘4씩 더하기’ 또는 ‘5씩 더

하기’와 같은 제안을 하는 것은 ‘설명적 구조(explanatory structure)’가 없기 때문에 가추와 구분되는 비생산적인 추측이라 하였다. Radford(2008) 역시 시행착오와 같은 수치적 휴리스틱을 주로 사용하여 일반식을 추측하는 것을 단순한 귀납법으로 정의하며 가추를 기반으로 하는 대수적 일반화와 구분하였다.

이상의 논의로부터 선행연구는 패턴 일반화에서 사례로 제시된 패턴의 불완전한 정보로부터 일반식을 추측하는 설명가능한 추론을 가추, 추측한 일반식의 유효성을 검증하는 추론 과정을 귀납으로 보았다. 이에 따라, 본 연구에서는 도형 패턴 일반화에서 가추와 귀납의 조작적 정의를 다음과 같이 제시한다.

사례로 제시된 도형 패턴의 일부 단계에서 제공하는 단서를 토대로 모든 사례에서 성립하는 일반적인 규칙을 추측하는 추론의 과정을 가추라 한다. 이때 가추에 의해 생성된 가설은 오류 가능성이 있지만 설명가능한 추측이어야 하며 귀납적인 검증이 가능한 형태이어야 한다. 또한 가추를 통해 생성한 일반적인 규칙을 몇 개의 사례를 통해 검증하는 추론의 과정을 귀납이라 한다.

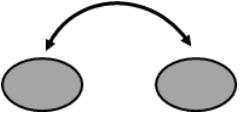

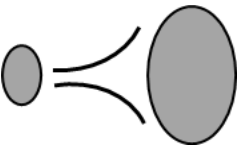
3.3. 일반화 행동⁴⁾

Ellis(2007)는 일반화에 관한 전통적인 연구들이 어떤 유형의 지식이 일반적인 것으로 간주되는지를 미리 결정하기 때문에, 학생들이 사례 전반에 걸쳐 공통 요소를 인지하고, 더 넓은 범위로 아이디어를 확장하거나, 정확성에 관계없이 현상에 대한 일반적인 설명을 하는 현상들을 포착하지 못할 수 있다고 지적하였다. 그녀는 Stacey(1989)의 근 일반화, 원 일반화와 같은 구분은 연구자의 관점에 의존한 것이며, 수학적으로 올바른 전략의 유형을 분류하는 데 집중함으로써 전략 전반에 걸쳐 영향을 주는 정신적 행동을 간과할 수 있으며 불완전하거나 부정확한 일반화를 초래하는 과정이 누락 될 수 있다고 하였다.

4) 본 절은 Ellis(2007)의 연구 내용을 요약 정리한 것이다.

Ellis(2007)는 전이 이론의 행위자 중심의 관점(actor-oriented perspective)(Lobato, 2003)을 확장하여 실제 수업과 같이 상대적으로 자유로운 상황에서 두 가지 실생활에 관련된 일차함수 문제 상황을 일반화하는 중학생의 일반화 행동에 대한 분류법(taxonomy)을 도출하였다. 일반화 행동은 학생의 활동과 발화로부터 추론된 정신적 행동을 뜻한다. 그는 일반화 문제를 해결하는 동안 학생이 사용하는 수학적 연산, 수학적 초점, 학생이 주의를 기울이는 특성 및 관계, 또는 학생이 사용하는 전략과 같은 문제 해결 행동에 대한 조사를 통해 학생이 일반화를 시도하는 과정에서 사용하는 정신적 행동의 유형을 추론하여 분류하였다. 일

<표 II -6> 일반화 행동의 범주(Ellis, 2007, p. 235)

범주	하위 요소 및 특성	
I. 관계맺기 	1. 상황 사이의 관계: 두 개 이상의 문제 또는 상황 사이의 관계 형성.	이전과 연결: 이전 상황과 현재 상황 사이의 연관성 형성. 새로운 것의 창조: 현재 상황과 유사한 새로운 상황의 발명.
	2. 대상 사이의 관계: 두 개 이상의 존재하는 대상 사이의 유사성 형성.	성질: 서로 유사한 성질에 초점을 맞춰 대상을 연결 형태: 서로 유사한 형태에 초점을 맞춰 대상을 연결
II. 검색하기 	1. 동일 관계의 검색: 두 개 이상의 대상 사이의 안정적 관계를 파악하기 위해 행동을 반복하는 것.	
	2. 동일 과정의 검색: 어떤 과정이 모든 사례에서 유효한지 확인하기 위해 그 과정을 반복하는 것.	
	3. 동일 패턴의 검색: 발견한 패턴이 모든 사례에서 안정적으로 존재하는지 확인하기 위한 반복 행동.	
	4. 동일 결과의 검색: 행동의 결과가 매번 동일하게 나타나는지 확인하기 위한 반복 행동.	
III. 확장하기 	1. 적용 범위의 확장: 어떤 현상을 더 큰 범위의 사례들에 적용시키는 것.	
	2. 특수한 것들의 삭제: 전체적 사례를 개발하기 위해 특정한 맥락적 세부사항을 삭제하는 것.	
	3. 조작: 새로운 사례를 발생시키기 위해 대상을 조작하는 것.	
	4. 연속: 새로운 사례를 발생시키기 위해 현재 패턴을 반복하는 것.	

일반화 행동의 개념은 구체적인 행동이라기보다 일반화 활동에서 학생들이 수행하는 구체적인 행동들을 야기하는 근원적인 과정을 이해하기 위한 것이라 볼 수 있다. 그에 따르면, 행위자 중심의 관점에서 도출한 분류법을 통해 연구자들은 학생이 일반적인 것으로 인식하는 대상이 무엇인지, 어떻게 일반화 행동에 참여하는지를 확인할 수 있다. 분석 결과 일반화 행동은 크게 관계맺기(Relating), 검색하기(Searching), 확장하기(Extending)의 세 가지 범주로 구분되었다. <표 II-6>은 일반화 행동의 범주와 각 범주의 하위요소 및 특성을 정리한 것이다.

관계맺기

‘관계맺기’는 학습자가 두 개 이상의 문제 상황 또는 아이디어 사이의 관계를 형성하는 것을 말한다. 이는 다시 ‘상황 사이의 관계맺기’와 ‘대상 사이의 관계맺기’로 분류된다. 만약 학습자가 두 개의 상황을 개별적인 것으로 인식한 후 두 상황 사이의 유사 관계를 확립한 경우, 연구자의 입장에서 그것이 동일한 맥락일지라 하더라도 그것은 ‘상황 사이의 관계맺기’이다. 예를 들어 톱니바퀴 A에는 5개의 톱니가 있고 톱니바퀴 B에는 8개의 톱니가 있을 때, A가 6번 회전한 후에 B가 연결되어 함께 돌기 시작하는 상황이 있다고 하자. 어떤 학생들은 이 상황이 이전에 보았던 한 사람이 특정 속도로 수영을 시작한 후 나중에 다른 사람과 합류하는 수영 시합의 상황과 유사하다고 해석을 한다. 이와 같이 현재의 상황과 이전의 상황을 연결하거나 현재의 상황을 토대로 이와 유사한 새로운 상황을 설명하는 것이 상황 사이의 관계맺기이다.

‘대상 사이의 관계맺기’는 두 개 이상의 대상 간의 관계를 형성하는 것을 말한다. 두 개 이상의 방정식, 그래프, 표와 같은 수학적 대상 사이의 연관성을 형성하는 것이 이 범주에 속한다. 상황 사이의 관계맺기와 다르게 대상 사이의 관계맺기에서 학생들은 문제의 대상들이 다른 상황이나 맥락과 연결되어 있다고 생각하지 않는다. $\frac{1/4C}{S} = \frac{3}{5}$ 와 $S = \frac{5}{12}C$ 를 두 나눗셈을 포함하는 형태에 초점을 두고 연결하는 행동과 같이 구문적 유사성을 바탕으로 서로 다른 두 가지 이상의 표현을 연결하는 것

을 예로 들 수 있다.

검색하기

검색하기는 같은 행동을 반복하여 어떤 유사한 요소를 찾으려고 노력하는 것이다. 이러한 행동은 의도적이고 목표지향적인 성격을 띤다. 예를 들어 시간(t)에 따른 이동거리(s)가 표 형태로 주어졌을 때, 각 순서쌍 (t, s) 에 대하여 반복적으로 $\frac{t}{s}$ 를 계산하여 “이동거리는 시간의 1.5배이다”라는 관계를 확인하는 것은 동일 관계의 검색이다. 연구자의 관점에서 수학적으로 자명한 것일지라도 학생은 동일성에 초점을 맞추어 검색할 수 있다. 그들은 관계에 초점을 맞추는 것 외에도 검색을 하는 동안 과정, 패턴, 결과(해법)에 초점을 맞출 수 있다.

만약 표에서 t 의 증분 10, 8, 5, 35를 구하고 s 의 증분 25, 20, 12.5, 87.5을 구한 뒤 계산을 통해 s 의 증분이 t 의 증분의 2.5배임을 확인하는 것은 동일 과정의 검색이다. 이러한 산술적 계산은 속도와 이동거리라는 문제 상황에 대한 양적 추론과 연관되지 않으므로 동일 관계의 검색이 아닌 동일 과정의 검색이라 볼 수 있다. Ellis는 학생의 주제에 대한 이해도를 바탕으로 연구자가 동일 관계의 검색과 동일 과정의 검색을 구분할 것을 권고했다.

표 형태의 수치적 패턴을 보고 “ x 쪽은 1씩 증가하고, 다른 y 쪽은 7씩 증가해요”라고 말하는 경우와 같이 x 의 증분과 y 의 증분 사이의 관계에 대해 주의를 기울이지 않고 단순한 숫자 패턴에 초점을 맞추는 경우는 동일 패턴의 검색이다.

방정식 $2(4b-3)=8b-6$ 에서 변수 b 에 임의의 값을 대입하여 좌변과 우변의 결과를 반복적으로 비교하는 행동이 동일 결과의 검색의 예이다.

확장하기

학생이 패턴 또는 유사성의 관계를 인식하는 것을 넘어서 그 패턴이나 관계를 보다 일반적인 구조로 확장해 나가는 행동은 확장하기 범주에 속한다. 확장하기를 통해 학생들은 타당성이 성립하는 새로운 범위, 집합

의 새로운 원소, 새로운 관계, 새로운 구조 또는 일반적인 현상에 대한 새로운 설명을 생성한다. 제 1사분면에 표현된 시간-속력 그래프를 제 4사분면으로 확장하는 것은 ‘적용 범위의 확장’의 예이다. 특정 문제 상황에서의 일반화에서 문제의 성질, 관계, 패턴 등의 맥락적인 세부사항들을 제거함으로써 보다 일반적인 진술로 확장하는 것은 ‘특정한 것들의 삭제’이다. 예를 들어 뺄셈이 12cm를 10초동안 걷는 상황에서 “1초가 증가하면 $\frac{6}{5}$ cm 더 가고, 반대로 1cm 가면 $\frac{5}{6}$ 초가 소요된다”를 뺄셈, 시간, 속도 등의 맥락을 제거하고 “A단위가 1증가할 때, B단위가 d 증가한다면, 반대로 B단위가 1증가할 때, A단위는 역수인 $\frac{1}{d}$ 증가한다”와 같이 특정한 사례에 얽매이지 않는 방식으로 확장할 수 있다.

x 와 y 사이의 비율이 1:7이라는 관계적 사실을 토대로 (7, 54)에서 x, y 사이에 각각 0.5와 3.5를 더해 (7.5, 57.5)를 얻는 것은 ‘조작적 확장하기’로 볼 수 있다. 마지막으로 패턴은 연속적으로도 확장될 수 있다. 예를 들어 학생이 x 는 1씩 증가하고 y 는 7씩 늘어나는 것을 이용하여 패턴을 (6, 16), (7, 23), (8, 30)와 같이 반복적인 행동을 통해 확장하는 것은 ‘연속적 확장하기’의 예이다. 패턴 자체에 초점을 맞춘 것이 연속적 확장인 반면, 조작적 확장은 관계에 초점을 맞추는 것이라는 측면에서 서로 구분된다.

Ellis(2007)는 일반화가 관계에서 검색, 확장으로 이동함에 따라 학생들의 일반화가 점차 정교해진다고 보았다. 관계맺기 행동을 하는 학생들은 자연스럽게 관계를 형성하였지만 이는 반드시 의도적인 것은 아니었다. 그러나 검색에서는 학생들이 유사성에 의한 관계의 존재를 예측하고 그것을 찾기 위한 노력을 수행하였다. 따라서 검색하기는 의도적인 문제 해결 활동을 나타낸다. 마지막으로 존재하지 않는 대상에 대한 추론을 확장함으로써 학생들이 새로운 지식을 생성한다고 보았다. 이러한 Ellis의 행위자 중심 관점의 채택은 “일반화”로 간주되는 학생들의 행동 범위

를 확대할 수 있게 해주었다. 예를 들어 검색하기 범주는 이전의 연구에서 일반화의 형성과 관련하여 중요하게 고려된 활동이 아니었다. 그러나 그의 연구에서 검색은 적절한 패턴이 확인될 때까지 반복되며 비효율적인 과정을 초래할 수도 있지만, 궁극적으로 지속적인 검색은 학생들이 유용한 관계를 만들고 확장하는 것을 도울 수 있었다. 따라서 일반화 행동의 분류는 연구자들과 교사들은 학생들이 올바르게 또는 부정확하게 일반화할 때 참여하는 과정을 더 잘 이해할 수 있도록 도울 수 있다. 특히 행위자 중심의 관점을 택함으로써 일반화 행동 분류법은 연구자들이 수학적 일반화를 향한 유일한 길로서 패턴의 인식, 형식화, 규칙 개발이라는 전형적인 모델에서 벗어날 수 있게 해준다는 데 의의가 있다.

4. 학생들의 패턴 일반화에 관한 선행연구

도형 패턴 과제가 초기 대수의 중요한 소재이자 대수적 사고를 촉진할 수 있는 활동으로 주목받아왔음에도 불구하고 여러 연구에서 대수를 곧 배울 중학생들이나 이미 배운 중학생들조차 패턴 일반화에 어려움을 겪는다는 것을 보고하였다(e.g. 정홍춘, 이경화, 2008; English & Warren, 1998). 여기에서는 학생들이 사용하는 일반화 전략의 유형과 전략 선택에 관한 경향성에 대해 알아보고, 일반화에서 겪는 어려움에 대해 살펴본다.

4.1. 패턴 일반화 전략

1990년대부터 최근까지 여러 연구자들이 패턴 일반화에서의 학생들의 일반화 전략에 관심을 기울여 왔다(e.g. 이명기, 나귀수, 2012; Becker & Rivera, 2005; Bishop, 2000; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Lannin, 2003; Stacey, 1989). 이때 일반화 전략은 주로 학생이 일반식을 계산해내는 방법을 수학적인 특성을 기준으로 분류한 것이다.

학생들은 동일한 패턴 P 를 서로 다르게 인식하고, 그 결과 서로 다른 방식의 일반화가 나타난다(Jurdak & El Mouhaya, 2014; Rivera, 2010a). 개별 학생의 패턴 일반화 전략은 패턴의 유형에 따라 달라지며, 하나의 과제에서도 몸 풀기 문제, 근 일반화 문제, 원 일반화 문제마다 서로 다른 전략을 사용할 수 있다(Becker & Rivera, 2005; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Lannin et al., 2006a).

4.1.1. 일반화 전략의 유형

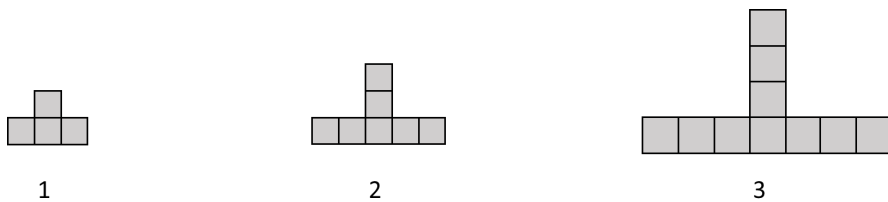
일반적으로 패턴 일반화 전략은 크게 수치적 접근(numerical mode)과 도형적 접근(figural mode)⁵⁾으로 구분할 수 있다(Becker & Rivera, 2005;

5) ‘시각적(visual)’과 구분하고 도형적 추론을 이용하는 접근임을 강조하기 위하여 도형적 접근으로 번역하였다.

Krebs, 2003; Lannin et al., 2006a). 수치적 접근은 도형 패턴을 수열 또는 표와 같은 수치적 패턴으로 변환한 후에 패턴의 물리적 특성은 고려하지 않은 채 수치적 특성에 의존하여 패턴을 일반화하는 전략을 말하며, 도형적 접근은 패턴을 구성하는 도형의 물리적 특성을 근거로 패턴을 일반화하는 전략을 말한다.

일반적으로 몸풀기 문제, 근 일반화 문제, 원 일반화 문제 등으로 구성된 패턴 일반화 과제에서 학생들의 전략은 시종일관 수치적이거나 시종일관 도형적인 경우도 있지만 두 가지 모두를 복합적으로 사용하는 경우도 나타난다(Becker & Rivera, 2005; Chua & Hoyles, 2010). Becker & Rivera(2005)는 이러한 경우를 실용적(pragmatic) 일반화로 분류하였다.

선행연구에서 보고되는 학생들의 수치적 전략은 핵심이 되는 추론의 유형에 따라 크게 재귀, 비례 추론, 추측과 확인, 비교로 구분할 수 있다. [그림 II-23]의 역T 패턴을 예로 살펴보면 다음과 같다.



[그림 II-23] 역T 패턴

재귀(recursive)

도형 패턴을 수열 4, 7, 10, ... 로 변환한 뒤 연속된 항 사이의 일정한 차 3을 인식하여 앞의 항에 3을 더하면서 다음 항들을 구하는 전략이다. 재귀적으로 인접한 항을 구하는 방법만으로는 원 일반화 문제를 해결하기 어렵다. 따라서 학생들은 재귀적으로 인식한 일정한 차 3을 이용하여 원 일반화나 n 단계를 일반화하기 위해 다른 전략을 사용하는데, 대표적으로 차이 전략(difference)과 연결 전략(chunking)이 있다.

차이 전략(difference)

일정한 차 3에 단계의 수를 곱하여 타일의 수를 구하는 것으로 역T패턴을 예로 들면 $3 \times 5 = 15$ 로 5단계 타일의 수를 구하는 것이다. 이러한 전략은 일반적으로 유효하지 않다. Stacey(1989)는 이러한 접근을 차이 (Difference) 전략이라고 하였다.

연결 전략(chunking or counting all)

두 항을 일정한 차 3으로 연결하는 것이다(Healy & Hoyles, 1999; Lannin et al., 2006a). 예를 들어, 5단계는 2단계보다 3단계 이후이고 1단계가 증가할 때마다 3씩 증가하므로 5단계는 $7 + 3 \times 3 = 16$ 이라고 구하는 것이다. 이와 같은 사고를 일반화하면 1단계에 $n-1$ 번 3씩 증가하면 n 단계 수와 같아지므로 n 단계는 $5 + 3(n-1)$ 가 됨을 구할 수 있다. Garcia-Cruz & Martinon(1998)은 이 전략을 일반적인 재귀적 전략과 구분하고 전부세기(counting all)라고 하며 재귀적 관계에서 함수적 관계에 도달할 수 있는 방법이라 하였다. 그러나 덧셈과 곱셈 사이의 연결을 제대로 이해하지 못한 중학생들은 이러한 연결 전략을 이용한 일반식의 도출에 어려움을 겪는다(Lannin, 2003). 이 전략은 유도 원리를 통한 논리적 정당화가 가능한 수치적 일반화 방법이라고 볼 수는 있지만 비선형 패턴에서는 적용하기가 쉽지 않다.

전체-부분(whole-object)

일부 학생들은 종종 비례 추론을 적용하여 선형 패턴을 일반화하는 경우가 있다(Bishop, 2000; English & Warren, 1998; Lannin, 2005; Stacey, 1989). 역T패턴에서 2단계 타일의 수는 7이므로 5배 큰 $10(2 \times 5)$ 단계는 $7 \times 5 = 35$ 라고 생각하는 것이다. 이러한 전략은 an 꼴의 반복패턴에서만 유효하고 $an + b (b \neq 0)$ 꼴 패턴에는 적용되지 않으므로 일반적으로 오개념 전략에 해당한다.

추측과 확인(guess and check)

추측과 확인은 시행착오의 방법으로 일반식을 찾는 전략이다. 추측과 확인 전략을 사용하는 경우 일반식을 구한다고 하여도 패턴에 내재된 구조를 이해했다고 볼 수 없으며 자신의 규칙에 대한 정당화가 어렵다. 추측과 확인 전략은 사실상 산술적인 개념에만 의존하는 것이다(Radford, 2014). 추측과 확인은 그 방법에 따라 무작위 유형과 체계적 유형으로 나눌 수 있다.

무작위(Randomly) 유형

무작위로 규칙을 추측한 뒤, 문제에 제시된 단계의 수를 이용하여 확인하는 방식으로 일반화된 식을 찾는 것이다. 이 전략을 사용하는 학생들은 “몇 가지 규칙을 시도해보다가 3을 곱하고 1을 더하면 된다는 것을 알았습니다” 라고 대답할 수 있다. 이러한 전략은 규칙과 상황의 관계에 대한 통찰력을 제공하지 않으므로 학생이 자신의 규칙을 정당화하기 어렵다(Lannin, 2003).

체계적(Systemic) 유형

일부 선행연구에서 학생들은 체계적인 절차에 의한 추측과 확인을 통해 일반식을 도출하기도 한다. 예를 들어 Rivera(2007)의 연구에서 한 학생은 1단계의 수가 4인 것을 보고 규칙을 $4n$ 으로 추측한다. 이후 $n=2$ 일 때 대입해보니 맞지 않음을 인식하고 $4n - n = 3n$ 으로 규칙을 수정한다. 이제 다시 $n=1$ 일 때 4가 나오게 하기 위해서 1을 더하여 $3n+1$ 이라는 규칙을 얻어낸 후, $n=2, n=3$ 일 때 성립함을 확인한다. Krebs(2003)의 연구에서 한 중학교 2학년 학생은 이차패턴의 일반식을 $n(n+a)$ 꼴이 될 것이라고 추측한 뒤, $n(n+3)$, $n(n-1)$, $n(n-2)$, $n(n-3)$ 등 a 의 값을 바꾸어가며 확인했는데, 결국 답을 찾을 수 없었다. 답의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이었기 때문이다.

비교(Comparison)

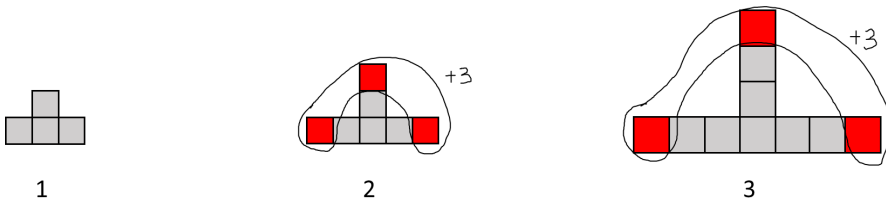
알고 있는 수열과 비교하여 문제의 제시된 수열의 일반식을 도출하는 전략이다. Hargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrocks-Taylor(1999)의 연구에서는 3의 배수 표에 대해 사전 지식을 가진 학생들이 3의 배수 수열과 주어진 수열을 비교하여 $3n+1$ 을 찾는 전략을 학생들이 많이 사용하였다. 이러한 비교 전략은 재귀나 추측과 확인 등과 복합적으로 등장하기도 한다. 예를 들어, 재귀적으로 일정한 차 3을 인식하여 $3n$ 을 인식한 후, $3n$ 의 수열 3, 6, 9, ... 과 4, 7, 10, ... 이 1씩 차이난다는 점을 이용하여 $3n+1$ 로 일반식을 구하는 것이다(Bezuszka & Kenny, 2008).

한편, 선행연구에서 보고되는 도형적 접근에 해당하는 일반화 전략은 크게 직접 그려서 세기, 재귀, 식에 투영하기, 상황적 이해로 구분할 수 있다.

직접 그려서 세기(draw and count)

예를 들어 10단계 그림을 직접 그린 후 하나하나 세어 10단계 타일의 수를 구하는 전략으로 Stacey(1989), Lannin(2003)의 연구에서 보고되었다.

재귀(recursive)

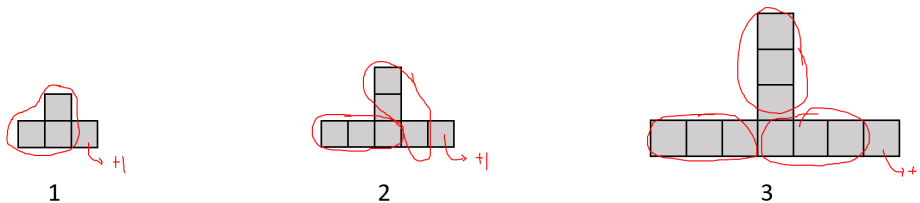


[그림 II-24] 재귀적 관계의 시각적 인식

연속된 단계 사이의 차이를 시각적으로 인식하고 이를 이용하여 다음 단계를 구하는 것이다(El Mouhayar & Jurdak, 2016). 예를 들어, [그림 II-24]와 같이 역T패턴에서 단계가 증가할 때마다 세 방향으로 타일이 1

개씩 증가한다는 것을 시각적으로 인식하고, 3단계의 세 방향에 타일을 1개씩 추가하여 4단계 타일의 수가 13임을 구하는 것이다. El Mouhayar & Jurdak(2016)의 연구 참여자 중 1.1%의 극소수의 학생이 시각적으로 파악한 성장단위를 이용하여 두 항 사이를 연결하는 시각적 연결 전략을 사용하였다. Wilkie & Clarke(2016)의 연구에서 전체 222명의 중학생 중 32.5%가 재귀적인 방식으로 역T패턴을 시각화하기도 하였다.

식에 투영하기(formula projection)



[그림 II-25] 식에 투영하기 사례

Rivera & Becker(2011)의 연구에서 한 중학교 1학년 학생은 먼저 수치적이고 재귀적인 방법으로 일반식을 도출한 뒤, 자신의 식을 시각적으로 정당화하는 과정에서 식의 모양에 맞게 패턴을 분해한다. 이를 역T패턴에 맞게 바꾸어 설명해보면 수치적인 방법으로 $3n+1$ 을 도출한 뒤, 패턴을 [그림 II-25]와 같이 분해하여 정당화하는 것이다. 이러한 정당화에 의한 일반화는 시각적이지만 단순히 식의 형태와 일치하도록 패턴을 나누는 것이므로 대수적으로 유의미하다고 볼 수 없다.

상황적 이해(contextual)

패턴을 구성하는 도형들의 시각적인 구조로부터 도출되는 상황적 관계에 의한 추론을 이용하는 전략이다. 예를 들어, 역 T패턴에서 중앙 타일을 기준으로 세 방향으로 일자 패턴이 있다는 시각적 대칭성을 파악한 후 각 일자 패턴은 단계 수 만큼의 타일로 구성되어 있다는 상황적 관계를 이용하여 $3n+1$ 을 도출하는 것이다. Lannin(2003)은 이러한 일반화 방법이 임의의 단계의 수를 구할 수 있는 가장 바람직한 일반화 방법이

라고 하였고, Rivera(2007)는 대수적으로 유용한 구조를 보는 것이라 하였다. 이러한 전략은 패턴의 해석된 구조에 대한 정당화와 연결되는 방법이다(Lannin, 2005; Rivera, 2013).

4.1.2. 학생들의 전략 선택

Krebs(2003)의 10명의 중학교 2학년 학생을 대상으로 한 연구에서 쉬운 문제에서는 60%의 학생이 수치적 전략을 사용하였지만 어려운 문제에서는 90%의 학생이 수치적 전략을 사용하였다. Becker & Rivera(2005)의 연구에 참여한 고등학생 역시 도형적 접근보다 수치적 접근을 더 많이 사용하였다. El Mouhayar & Jurdak(2016)은 레바논의 4학년부터 11학년까지 총 1232명의 일반화 전략을 분석하였는데, 모든 학년에 대해 근 일반화 문제와 원 일반화 문제에서는 수치적 접근의 비율이 높았지만, 몸풀기 문제에서는 도형적 접근이 더 많았다. 또한 학년이 올라갈수록 도형적 접근을 사용하는 학생의 비율이 높아지는 경향이 나타났다. Rivera & Becker(2005)의 연구에서 42명의 예비교사 중 26명은 수치적 접근을 사용하고 16명만이 도형적 접근을 하였다. 수치적 접근을 한 예비교사들은 대부분 재귀적 관계를 정확히 표현하지 못하였으며, 연결 전략과 추측과 확인 전략을 사용한 일부 교사들만이 일반식을 바르게 구하였다. 일반적으로 도형적 접근을 사용한 예비교사들이 일반화에 대한 이해, 변수 n 에 대한 이해가 높고 정답률도 높았다. 그러나 수치적 접근을 사용한 교사 중에는 변수 n 을 자리지기로 생각하는 경우가 있었다. 수치적 추론에 의존한 예비교사들은 일반화를 기울기와 절편의 값을 찾아 식을 세우는 하나의 과정으로 인식하였다. 대조적으로, 시각적 추론을 이용하는 예비교사들은 함수적 규칙을 개념으로 인식하였으며 일반화하는 능력에 있어서도 보다 융통성이 있었다. 이들은 중학생들이 수치적 접근을 주로 사용하는 이유 중 하나가 그들을 가르치는 교사들이 수치적 접근을 주로 사용하기 때문일 수 있다고 추측하였다. Rivera와 Becker의 종단 연구에서(Becker & Rivera, 2006; Rivera & Becker, 2008, 2009) 수치적 접근을 사용하는 학생들은 $y = ax + b$ 꼴 패턴의 일반화를 단순히

상수 a, b 의 값을 구하는 과정으로만 인식했다. 그러나 도형적 추론을 기반으로 한 접근은 대수적 표현의 동등성에 대한 학생들의 이해뿐만 아니라 정당화에 도움을 주었다. Rivera & Becker(2011)는 표에 수를 적어놓고 식을 찾는 수치적 전략이 학생들이 대수적으로 유용한 일반화를 정당화하는 능력에 부정적인 영향을 준다고 주장하였다. 이 전략을 사용하는 경우 대부분 정당화의 본질이 시각적 도형에서 수로 바뀐다. 즉, 학생들은 일반식이 어떻게 각 단계의 구조를 설명할 수 있는지에 대한 고려 없이 단지 생성된 표의 각 숫자가 공식과 맞아떨어지는지 확인하는 공식의 외형 맞추기 전략을 사용할 가능성이 높다. Noss et al.(1997)은 패턴 활동에서 수치적인 표나 계산을 통한 일반화에 집중함으로써 구조적 표현을 잃은 패턴 발견하기에 집중하는 것을 경험적 패턴 발견(pattern-spotting)이라고 표현하였다⁶⁾. 경험적 패턴 발견에서 학생들은 함수에 대한 아이디어나 독립변수와 종속변수 간의 불변 관계를 탐구하기보다는 요구하는 값을 계산하기 위한 산술적 기술의 개발에 집중하게 된다고 비판하였다.

여러 선행연구는 학생들이 수치적 접근 중에서도 특히 재귀적 전략에 집중하는 경향이 있음을 보고하였다(김성준, 2003; English & Warren, 1998; Steele & Johanning, 2004). 그러나 앞에서 살펴본 것과 같이 재귀적 규칙은 인접한 항을 순차적으로 구하는 데에는 효율적이지만 큰 항이나 임의의 항을 구하는 것에 적절하지 않다. Orton & Orton(1999)은 학생들의 산술적 무능과 재귀적 접근에 대한 집착을 성공적인 일반화를 방해하는 주요 장애물로 언급하였다. 그들은 재귀적 접근이 패턴의 일반적인 구조를 보는 것을 방해한다고 하였다. Rivera & Becker(2011) 역시 수치적 접근의 재귀적 전략이 학생들이 대수적으로 유용한 일반화를 정당화하는 능력에 부정적인 영향을 준다고 말하였다.

그러나 재귀적 사고 역시 중요한 대수적 사고 중 하나이다(NCTM, 2000). Yerushalmy(2000)는 함수적 접근 이전에 재귀적 접근을 통하여 패

6) 경험적 패턴 발견이 반드시 수치적 접근에서만 나타나는 것은 아니다. Rivera(2013)는 도형적 접근 중 식에 투영하기 역시 경험적 패턴 발견에 해당한다고 하였다.

턴을 해석하고, 나아가 재귀적 방법으로 패턴을 생성하는 경험이 필요하다고 주장하였다. 실제로 학생들은 대부분 일반화할 때 재귀적 접근으로부터 시작하는 경향이 있었는데, 재귀적 접근에서 함수적 접근으로 성공적으로 전환하는 학생들의 일반화 성공률이 높았다(Amit & Neria, 2008; Billings et al., 2007; Wilkie & Clarke, 2016). 따라서 학생들은 함수적 규칙과 재귀적 규칙 모두를 사용하여 추론할 수 있어야 하며 두 가지 유형의 규칙 간에 존재하는 연결성을 인식할 수 있어야 한다(Lannin, Barker, & Townsen, 2006b; Mason, 1996). 또한 컴퓨터 환경에서는 상황에 따라 재귀적인 규칙이 함수적인 규칙보다 효율적인 알고리즘으로 작동할 수 있다(Noss et al., 1997). Amit & Neria(2008)의 연구에서는 일부 학생들의 재귀적인 관계를 이용하여 자신의 일반화를 검증하는 모습도 나타났다. 따라서 학생들이 상황에 따라 재귀적 또는 함수적으로 추론 할 수 있는 유연성을 신장하고 각 추론 유형의 장점과 한계를 파악하게 하는 것이 중요하다. 이러한 유연한 추론으로 인한 수학적 힘은 학생들이 다양한 상황을 모델링하고 중요한 수학적 아이디어를 서로 연결하며 모든 학생들의 수학적 성공을 증가시킬 수 있는 대수적 개념에 대한 기본적인 이해를 구축할 수 있게 한다(Lannin, 2004).

정리하면 학생들은 도형적 접근보다는 수치적 접근을 선호하며, 특히 수치적 접근 중에서도 재귀적 전략을 사용하는 경향이 있으나 이는 산술적이며 대수적 일반화로 연결되기 쉽지 않다. 따라서 학생들이 자연스럽게 도형적 접근 기반의 상황적 이해 전략을 사용할 수 있도록 촉진하는 방법을 모색하는 것은 패턴 일반화의 주요 연구 문제 중 하나라 할 수 있다.

한편, Lannin et al.(2006a)은 학생들의 패턴 일반화 전략 선택에 영향을 미치는 요인을 조사하였다. 학생의 인지 구조는 전략 사용에 영향을 미치는 요인 중 한가지이다. 인지 구조에는 수학 연산에 대한 사전 지식, 이전 과제에서 사용한 전략, 학생의 수학적 성향 및 상황의 물리적 구조를 시각화하는 능력이 포함된다. 또 다른 요인에는 과제 자체의 설계이다. 일반화를 촉진하기 위해 묻는 단계의 수(5단계, 11단계, n 단계),

패턴의 수학적 구조(선형 증가, 선형 감소, 비선형 등) 등이 해당한다. 연속적인 단계 또는 비연속적인 단계를 묻거나 서로 배수가 되는 단계를 묻는 것 등은 학생의 전략 선택에 영향을 미친다. 효율성에 대한 학생의 욕구와 특정 전략이 비효율적이라는 인식은 종종 전략 선택 및 전환의 촉매제 역할을 했다. 예를 들어 재귀적 전략을 사용하던 학생이 10단계를 구하기 위해 비율전략을 사용하기도 한다. 또한 학생들의 시각적 표상 능력이 전략 선택에 영향을 미쳤다. 시각적 표상 능력이 뛰어난 학생들은 패턴의 그림이 표현되는 방식에 영향을 많이 받았는데, 연속적으로 3개의 단계를 함께 제시하면 재귀적 전략을 사용하지만, 1개의 단계만 제공했을 때는 함수적 전략을 주로 사용하였다. 시각적 표상 능력이 낮은 학생은 대부분 도형과 관계없이 수치적 전략을 사용하였다.

4.2. 패턴 일반화의 어려움

4.2.1. 중학생의 패턴 일반화 수행 정도

Stacey(1989)는 중학생 379명의 선형 패턴 일반화에 대해 분석하였는데, 도형 패턴에서 근 일반화 문제를 해결한 학생들 중 절반이 원 일반화 문제를 해결하지 못하였다. English & Warren(1998)의 430명의 12-15세 학생들을 대상으로 한 연구에서 아주 간단한 도형 패턴에 대해서도 40% 이하의 학생만이 일반화를 정확히 표현할 수 있었다. Amit & Neria(2008)은 139명의 11-13세 영재 학생들의 패턴 일반화 과정에 대해 조사하였다. 연구에 참여한 대다수의 학생들은 조작적 수준의 일반화에 해당하는 근 일반화 문항까지는 대답할 수 있었지만 이론적·개념적 수준의 일반화에 해당하는 원 일반화나 n 단계 일반화 문항에는 대답하지 못하였다. 도형 패턴의 일반화는 고등학생들에게도 쉽지 않은데, 9학년 학생들을 대상으로 한 Becker & Rivera (2005)의 연구에서 22명 중 13명이 일차패턴을 일반화하지 못하였다.

국내에서도 중학생의 패턴 일반화 수행 정도를 조사한 연구가 일부 있다. 강현영(2007)은 정규수업 시간에 문자와 식을 이미 배운 중학교 1학

년 126명, 2학년 256명의 패턴 일반화를 조사하였는데, $3n+1$ 꼴의 성냥개비 패턴에 대해 1학년의 정답률은 53.9%, 2학년의 정답률은 72% 였다. 일반화에 실패한 학생들은 대부분 비례전략을 잘못 적용한 경우이거나 재귀적인 접근에서 함수적인 접근으로 전환하지 못한 경우였다. 정홍준, 이경화(2008)는 문자와 식을 배운 중학교 1학년 114명의 패턴 일반화에 대해 조사하였는데, 초등학교 4학년 수준의 선형 패턴에 대해 약 60%의 학생만이 시각적 또는 언어적 또는 기호적인 일반화 표현을 구할 수 있었다. 한편, TIMSS 2003, 2007의 대수영역 추이문항으로 선형 패턴 문항이 사용되었는데 4개의 정사각형을 만드는 13개의 성냥개비를 제시하고 73개의 성냥개비를 사용하면 몇 개의 정사각형을 만들 수 있는지 묻는 문항이다. 우리나라(44.3%)는 국제평균(8.6%)에 비해서는 유의하게 높은 정답률을 보였으나 대만(58.1%)에 비해서는 유의하게 낮았다(김경희 외, 2009). 이 문항은 일반식을 구하지 않고 재귀적인 관계만을 이용해도 해결할 수 있음에도 불구하고 우리나라의 43%의 학생들이 완전히 틀렸거나 공란으로 답을 제출했다.

4.2.2. 어려움의 원인

Billings et al.(2007)은 학생들의 패턴 일반화 과정의 경로를 분석하였는데, 도형 패턴에서 발견된 관계를 설명, 분석, 확장 및 일반화하기 위해 학생들이 비슷한 과정을 거친다는 것을 발견하였다. <표 II -7>과 같

<표 II -7> 학생들이 도형 패턴을 분석하고 확장하는 과정(Billings et al., 2007)

1. 변화에 대한 공변적 분석 과정
과정1: 연속되는 도형들 사이의 변화를 분석하기
과정2: 앞 단계의 도형을 이용하여 새로운 도형을 구성하기
과정3: 패턴에서 불변하는 요소와 변화하는 요소를 확인하기
2. 변화에 대한 대응적 분석 과정
과정4: 종속 변수의 변화하는 양상을 단계의 수로 나타내기
과정5: 도형을 큰 수 n 까지 확장하기

이 학생들은 공변적 분석으로부터 출발하여 대응적 분석으로 전환하였다.

Amit & Neria(2008)은 영재들의 도형 패턴 일반화 경로를 조사하여 조작적 단계와 개념적 단계로 구분하였다. 초기 조작적 단계에서 학생들은 패턴의 기본적인 규칙을 발견하고 재귀적인 방법으로 패턴을 확장하였다. 거의 모든 학생들이 이 단계를 거쳤다. 두 번째 개념적 단계에서 학생들은 불변하는 것과 변화하는 것을 인식하고 단계의 수와 이들 사이의 함수적 관계를 생성한다.

이러한 선행연구의 결과는 학생들의 패턴 일반화 경로가 크게 재귀적 접근에서 함수적 접근으로 진행된다는 것을 의미하며, 이는 곧 패턴 일반화의 처리 과정이 경험적 일반화에서 이론적 일반화(Dörfler, 2008)으로 전환 과정임을 의미한다. 그러나 학생들에게 재귀적 접근에서 함수적 접근으로의 전환, 즉 경험적 일반화에서 이론적 일반화로의 전환은 쉬운 일이 아니다. 선행연구에서 공통적으로 학생들의 패턴 일반화의 어려움의 원인으로 지적하는 부분은 재귀적 접근과 함수적 접근 사이의 전환에 있다. Amit & Neria(2008)의 연구에서 패턴 일반화에 실패한 학생은 모두 함수적 단계로 전환하지 못하고 재귀적 단계에 머물렀다. Wilkie & Clarke(2016)의 연구에서도 패턴을 재귀적으로 시각화한 학생 중 함수적으로 전환하지 못한 학생들은 대부분 일반식을 구하지 못하였다. 그 외 많은 연구자들은 학생들의 재귀적 접근에 대한 집착을 성공적인 일반화를 방해하는 주요 장애물로 언급하였다(김성준, 2003; Orton & Orton, 1999; Rivera & Becker, 2011; Steele & Johanning, 2004).

함수적 관계를 수립하기 위해서는 단계의 수와 패턴의 물리적 구조를 연결시켜야 하는데, 학생들에게 이러한 과정 역시 쉽지 않다. 이러한 함수적 관계의 수립은 3.2에서 보았듯이 “대수적으로 유용한 패턴을 발견하는 능력(Lee, 1996)”을 요구한다. 대수적으로 유용한 패턴을 발견하기 위해서는 시각적 단서를 포함한 패턴이 단순한 그림처럼 보이는 감각적 지각을 넘어 인지적 지각이 필요하다(Rivera, 2010a). 그러나 많은 연구에서 보고된 바와 같이 학생들은 수치적인 접근에 치중하는 경향이 있으

며 패턴의 구조를 배경에 둔 채 수열에서 규칙을 찾는 경험적 패턴 발견하기(pattern-spotting) 활동에 빠지기 쉽다(Krebs, 2003; Noss et al., 1997; Rivera & Becker, 2005, 2007).

일부 중학생들은 상징적인 기호를 이용하여 일반성을 표현하는 데 어려움을 갖는다. 학생들은 여러 가지 대상을 동시에 나타낼 수 있는 다가 이름으로써의 변수 개념을 이해하는 데 어려움을 겪는 경우가 있으며, 도형 패턴 과제에서 n 번째 패턴을 n 에 대한 식으로 표현했다고 할지라도 자신들이 사용한 문자 n 에 대한 오개념을 가지거나 아무 의미 없이 이러한 문자를 사용할 수 있다(Lee & Wheeler, 1987). 김성준(2003)은 학생들이 패턴의 함수적 관계를 이해했지만 그것들을 언어적으로 표현하지 못하거나 대수적으로 기술하지 못하는 경우가 많기 때문에 함수적 관계를 언어 형태로 나타낸 후 다시 이것을 대수식의 형태로 일반화하는 과정을 중요하게 다룰 필요가 있다고 주장하였다.

선행연구에 의하면 패턴 일반화에는 사고의 유연성이 필요하다. Stacey(1989)와 Lee(1996)는 지각적 유연성(perceptual agility), 즉 몇 가지 규칙을 볼 수 있고 그 중 유용하지 않은⁷⁾ 규칙을 기꺼이 포기하는 것이 패턴 일반화 과정에서 중요한 열쇠라고 주장하였다. 그러나 이들의 연구에서 학생들은 한번 특정 방식으로 패턴을 바라보게 되면, 그러한 방식을 버리고 새롭게 패턴을 인식하기 매우 어려웠다. Wilkie & Clarke (2016)의 연구는 패턴의 구조를 인식하는 방식 중 대수적 표현을 이끌어 내는데 보다 유리한 방식이 존재한다는 것과 그러한 방식으로의 유연한 전환이 성공적인 일반화의 요소임을 뒷받침한다. Amit & Neria(2008)은 다양한 형태의 유연성이 도형 패턴의 일반화 과정에서 중요하다는 것을 밝혔다. 일반화에 성공한 학생들은 제시된 도형 패턴에서 수치적 표현, 수치적 표현에서 기호적 표현, 추상화와 검토의 과정에서 기호적 표현이 다시 수치적 언어적 표현으로 바뀌는 등 표현 사이의 전환이 매우 유연했다. 또한 재귀적 접근에서 시작해서 비효율성을 이해하고, 그 접근에 고착화되지 않고 다른 접근을 시도하려는 전략 전환의 유연성을 보였다.

7) 대수적 표현으로 연결되기 어려운 정도로 해석할 수 있다.

이들은 재귀적 전략을 자신들이 구한 일반식을 검증하는 도구로 사용하는 유연성도 보였다.

한편, Rivera(2013)는 학생들이 일반화 전반에 영향을 미치는 추론인 가추와 귀납의 관점에서 학생들이 일반화에서 겪는 어려움의 근원을 다음과 같이 조작적으로 분류하기도 하였다.

- 1) 가추적 가설을 세우는데 있어서의 개념적 어려움
- 2) 초기 가설에서 보다 더 강력한 가추적 가설로의 이행에서 겪는 개념적 어려움
- 3) 근 일반화, 원 일반화 문제를 통해 귀납적 방법으로 가추적 가설의 타당성을 확인하는 것에서의 개념적 어려움
- 4) 귀납법을 수행하는 데 있어서의 절차적 어려움
- 5) 관련된 연역적 주장을 정당화하는 데 있어서의 개념적 어려움

5. 패턴 일반화를 지원하는 마이크로월드

5.1. Constructionism과 패턴 일반화

Piaget의 제자이자 동료인 Papert(1980)는 지식은 단순히 전이되는 것이 아니라 학습자가 마음속에서 적극적으로 구성하는 것이라는 constructivism의 기본 관점을 전승하면서 도구(media)를 강조하는 constructionism을 주창하였다⁸⁾. Piaget의 constructivism은 동화와 조절을 통한 학습자 내면의 인지 구조의 변화에 초점을 두는 반면, Piaget의 constructionism은 다양한 도구와 맥락 속에서 지식이 형성되고 표현되는 과정에 초점을 둔다(Ackermann, 2001). Constructionism의 핵심은 ‘물리적 구성’을 통한 ‘정신적 구성’이라는 두 가지 ‘구성(construction)’에 있으며, Papert는 물리적 구성을 위한 놀이공간으로 컴퓨터 환경에 주목하고 Logo 마이크로월드를 개발하였다(김화경, 2006). Logo는 ‘가자’, ‘돌자’와 같이 거북이를 움직이는 명령어들과 조건, 제어, 반복 등의 명령을 이용하여 화면에 그림을 그리는 컴퓨터 기반 학습 환경이다. Papert(1980)는 아이들이 어릴 때 모국어를 배우듯이 자연스럽게 수학을 체득해야 한다고 생각했다. 그는 프랑스어를 배우는 가장 좋은 방법은 프랑스에 가서 사는 것처럼, 수학을 배우는 가장 좋은 방법은 Logo라는 수학 나라에서 수학적 언어를 사용하는 것이라 주장했다. 따라서 constructionism을 기반으로 하는 마이크로월드에서는 사용자가 자신의 생각을 표현하며 다양한 외적 인공물로 나타내기 위해 사용하는 표현체계가 가장 중요하다. 마이크로월드의 표현체계를 어떻게 설계하느냐에 따라 학습자가 가지고 있어야 할 사전 지식이 달라지며, 탐구할 수 있는 영역의 지식도 달라지기 때문이다(Resnick & Silverman, 2005). 예를 들어 Logo에서는 길이와 각을 기본으로 하는 ‘가자’와 ‘돌자’ 명령을

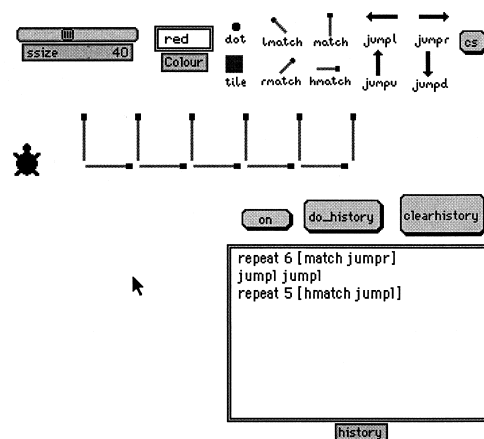
8) Papert는 자신의 구성주의를 Piaget의 구성주의와 구분하기 위하여 constructivism의 ‘v’를 ‘on’으로 바꾸어 constructionism이라 하였다(Papert & Harel, 1991).

사용함으로써 미분 기하학적인 방법으로 평면 도형을 탐구할 수 있다 (Abelson & Disessa, 1986).

일부 연구자들은 도형 패턴의 일반화를 통한 대수적 사고의 개발을 지원하기 위한 표현체계로서 마이크로월드를 설계하고 학생과 환경 사이의 상호작용에 대해 연구하였다.

Noss et al.(1997)는 학생들이 패턴 일반화에서 잘못된 전략을 사용하거나 수치적 접근에 집착하는 이유를 대상에 대한 조작, 조작의 결과, 대수적 표현 사이의 단절에서 찾았다. 이들은 성냥개비를 가지고 노는 것과 도형 패턴에 대해 생각하는 것이 대수로 이어질 것이라는 생각은 순진한 생각이라고 지적하면서 그에 대한 대안으로 동적대수시스템 (Dynamic Algebra System; DAS) Mathsticks를 제안하였다.

[그림 II -26]에서 볼 수 있듯이 Mathsticks는 거북이의 이동 명령, 성냥개비 배치 명령, 반복 명령 등을 이용하여 성냥개비로 패턴을 만들 수 있는 마이크로월드이다. Mathsticks에서 성냥개비를 조작하고 재구성하는 유일한 방법은 그들 사이의 관계를 명시적으로 표현하는 것이다. 그들은 대상을 통제하는 매커니즘으로써 표현체계에 집중하게 함으로써 대상들 사이의 대수적 관계를 준형식적이고 구체적이며 의미 있는 것으로 만들 고자 하였다. 2명의 12-13세 영국 학생들은 어떤 항이 주어져도 성냥이



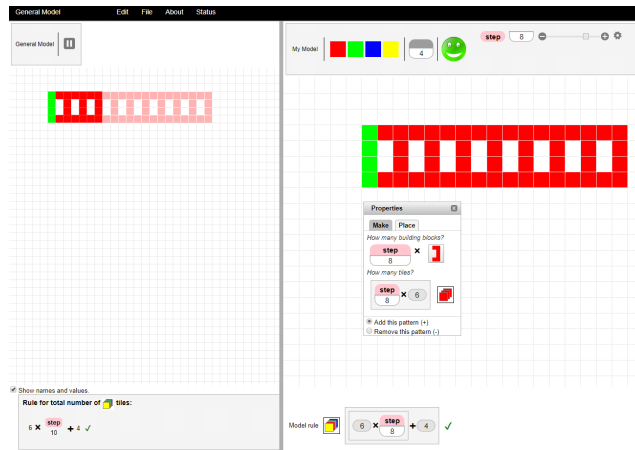
[그림 II -26] Mathsticks 마이크로월드(Noss et al., 1997, p. 221)

몇 개인지 예측할 수 있는 일반적인 절차(예: 프로그램)를 작성하기 위해 노력하였으며 수치적 자료에 집중하지 않았다. Mathsticks의 제한적인 표현체계는 시각적 구조에 기초한 체계적인 접근방식을 자연스럽게 유도하는 효과가 있었다. Mathsticks의 표현체계에는 일반화, 추상화의 씨앗이 내재되어 있으며 이는 행동과 대수 사이의 간극을 가교하는 역할을 하였다(Noss et al., 1997).

Noss et al.(2009)는 전통적으로 종이와 연필의 정적인 패턴 활동을 통해서 학생들의 일반화에 관한 사고 실험을 거의 볼 수 없다고 주장하였다. 또한 학생들이 수치적인 관점의 패턴 발견하기 활동에 집중하는 것을 막고 대수적으로 유의미한 패턴 일반화를 돕기 위한 마이크로월드 eXpresser를 설계하여 제안하였다. 이들은 대수적 사고를 돕는 마이크로월드의 설계 원리 3가지를 다음과 같이 제시하였다(Mavrikis et al., 2012).

- 1) 대상을 기본 단위로 분해하는 습관을 통해 구조적으로 볼 수 있어야 하며 이러한 구조를 이용하는 것에 대한 장점을 경험할 수 있는 활동을 지원한다.
- 2) 변하는 것과 변하지 않는 것을 확인하면서 특수한 것에서 일반적인 것을 볼 수 있도록 한다.
- 3) 학생들이 이용할 수 있는 하나의 언어를 설계하여 그들이 패턴에서 파악한 관계를 새로운 언어로 표현할 수 있으며, 관습적인 기호의 기계적인 습득 없이도 문자의 본래 기능을 경험할 수 있도록 한다.

[그림 II-27]는 eXpresser의 화면이다. 학생들은 마우스로 타일을 만들 수 있다. 만든 타일을 하나의 묶음인 블록으로 지정할 수 있고, 블록을 기본 단위로 다시 일정하게 반복시켜 패턴을 만들 수 있다. 반복을 지정할 때 블록을 평행이동시키는 방법과 횟수를 정하게 된다. 반복의 횟수는 네모 상자에 숫자를 적어서 나타내는데 이때 네모 상자의 속성이 '잠김'으로 설정되어 있는 숫자는 변하지 않기 때문에 상수처럼 작동하게 된다. 만약 네모 상자의 속성을 '열림'으로 선택하면 네모 상자의



[그림 II -27] eXpresser의 사용자 인터페이스

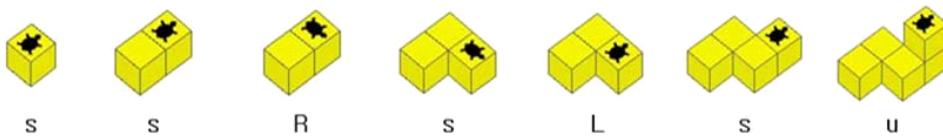
이름을 지정하도록 요구하는데 이는 곧 변수 역할을 한다. 왼쪽 General Model 창에서 재생 버튼을 재생했을 때 닫힌 상자는 변화하지 않지만 열린 상자의 값은 무작위로 변화하게 된다. 따라서 만약 학생이 패턴의 구조를 잘못 이해하여 ‘열림’을 통해 변수를 잘못 사용하였을 경우 General Model 창에는 이상한 형태의 패턴이 나타나게 된다. 엉망인 (messing-up) 패턴을 보여주는 기능은 학생이 자신의 가설을 확인하는 기회를 주는 시각적 패드백을 제공한다.

Mathsticks와 eXpresser의 공통적인 특징은 먼저 학생들이 자유롭게 자유롭게 패턴을 만들 수 있는 도구를 제공한다는 것이다. 학생들은 자신이 원하는 패턴을 환경 안에서 자유롭게 만들 수 있다. 그러나 임의의 n 번째 단계를 만들기 위해서는 패턴의 기본 단위를 인식하고, 패턴의 각 부분의 함수적 관계를 찾아 반복을 이용해야 한다. 학생들이 패턴을 만들 때 이용할 수 있는 표현체계를 제공하여 그들이 패턴에서 파악한 관계를 표현체계로 나타내는 과정에서 관습적인 기호의 습득 없이도 대수의 기능을 경험할 수 있도록 한다. Mathsticks에서는 텍스트 명령어가 eXpresser에서는 시각적 변수(icon-variable)인 네모상자가 이와 같은 역할을 한다. 일반화의 표현은 반드시 기호적일 필요는 없으며 기하적이거나 도상적일 수 있다(Dörfler, 1991). 일반적인 대수적 기호체계를 사용하

지 않더라도 학생들은 충분히 대수적으로 사고 할 수 있다(Radford, 2014). 마지막으로 학생들이 자신의 패턴에 대한 이해를 반성할 수 있도록 시각적 피드백을 구체적으로 제공한다는 공통점을 갖는다.

5.2. 3D 거북 표현식과 패턴 일반화

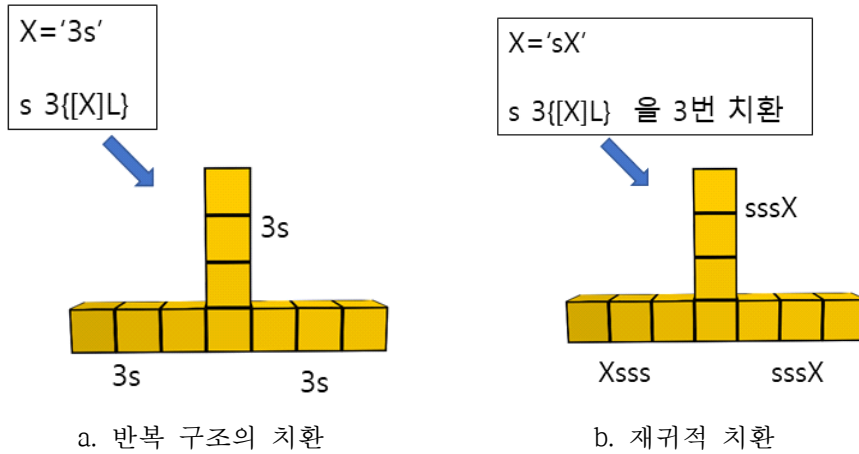
Cho et al.(2010)은 Logo의 거북 은유를 3차원 연결큐브에 확장하여 3D 거북 표현식(이하 거북 표현식)을 개발하였다. 거북 표현식은 [그림 II-28]과 같이 거북이가 앞(s), 뒤(t), 왼쪽(l), 오른쪽(r)으로 한 칸씩 이동하면서 블록을 만드는 문자와 거북이의 방향을 위(U), 아래(D), 왼쪽(L), 오른쪽(R)으로 회전하는 문자, 거북이의 위치를 기억하고 호출하는 문자([,])로 구성된다.



[그림 II-28] 3D 거북 표현식(Cho et al., 2012, p. 566)

거북 표현식은 초등학생도 쉽게 익히는 것이 가능하여 초등학교의 연결큐브 수업의 표현체계로 활용될 수 있으며(정혜림, 이승주, 조한혁, 2016), 심적 회전 과제에서 입체를 분석적으로 접근하는 효율적인 인지 전략으로 활용될 수 있다(이지운, 조한혁, 송민호, 2013; Cho & Lee, 2014). 이와 같이 거북 표현식은 교육적으로 다양하게 활용될 수 있지만, 특히 패턴 일반화, 변수, 함수, 치환 등 대수적 사고와 밀접하게 연관된다.

Dörfler(1991)는 변화하는 것과 변화하지 않는 것을 언급할 때 기호적인 표현이 필요해진다고 주장하였다. 따라서 패턴 일반화를 지원하는 마이크로월드에서는 이러한 기호적 표현의 가용성이 필수적이다. Noss et al.(1997)의 연구는 시각적 대상과 상징적 표현 사이의 연결이 명시적



[그림 II-29] 치환을 이용하는 2가지 방법

규칙에 의미를 부여하는 결정적인 요소가 될 수 있음을 보여주었다. 거북 표현식의 각 문자는 거북이의 행동과 1-1로 대응된다는 점에서 Logo의 '가자', '돌자'와 동일한 행동 문자이다. 학생들은 문자를 사용하여 행동을 만들고 문자 조작을 통해 도형 패턴을 생성하는 경험을 통해 문자가 가지는 의미를 풍부하게 할 수 있다(김화경, 2006). 이러한 행동 문자의 사용은 대수적 사고의 출발점이 될 수 있으며 반복 명령, 치환 명령, 변수의 사용과 함께 병행되었을 때 패턴 일반화를 지원하는 강력한 표현체계가 된다.

거북 표현식의 핵심은 치환문자에 있다. [그림 II-29.a]와 같이 반복되는 명령을 X 와 같은 문자로 치환함으로써 반복구조를 하나의 문자로 다시 압축하여 표현할 수 있다. 패턴에서 반복되는 구조를 치환문자로 지정하여 코드를 최소화시키는 활동은 학생들로 하여금 패턴을 기본단위의 반복으로 해석할 수 있도록 유도하고 치환이라는 대수적 사고의 유용성에 대해 인식할 수 있는 기회를 제공한다(Cho et al., 2016). 또한 동일한 패턴을 치환 문자를 이용하여 [그림 II-29.b]와 같이 재귀적으로 표현할 수 있다. 따라서 거북 표현식은 함수적인 방법뿐 아니라 치환을 이용하여 재귀적인 방법으로도 패턴을 만들 수 있다.

복잡한 패턴의 구조를 언어적으로 표현하거나 준상징적(semi-symbolic)

<p>8 X='s[uu]ss' 8X</p> <p>s[uu]</p>	<p>s[uu]</p> <p>8 X='sss[uu]' 8X</p>	<p>9 X='s[uu]' 9X</p> <p>8 Y='ss' 8Y</p>	<p>X='s[2u]2ss[2u]2ss[2u]2ss [2u]2ss[2u]2ss[2u]2ss[2u]2 ss[2u]sss2u'</p>
(a) 15 students	(b) 6 students	(c) 3 students	(d) 1 student

[그림 II-30] 학생들의 서로 다른 패턴 일반화 표현(Cho et al., 2012, p. 22)

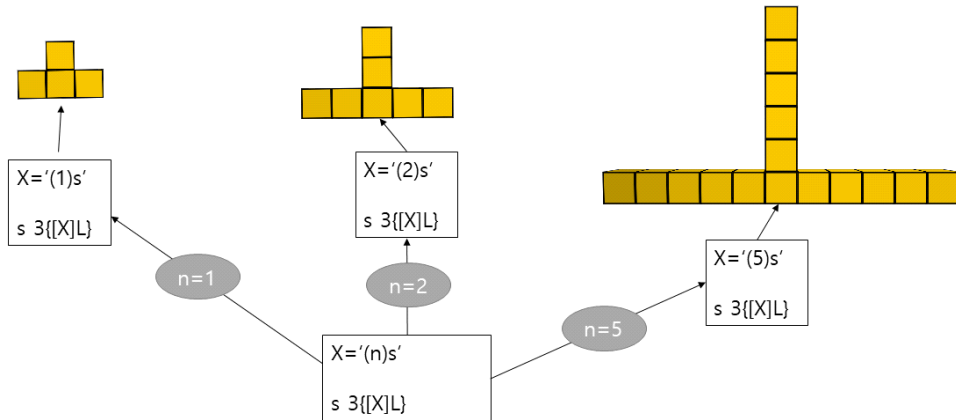
으로 표현하는 것 자체는 어려운 일이다(Markworth, 2010). 학교수학에서 말하는 패턴 일반화의 최종산물인 일반식은 단순히 패턴의 수량적인 측면을 나타낼 뿐 구조적 표현이라 할 수 없다. 반면 거북 표현식은 패턴의 수량적 측면과 공간적 측면을 동시에 표현할 수 있다. 학생들은 자신이 패턴의 구조를 해석한 방법을 반영하여 패턴을 만들 수 있는데, 실제로 Cho et al.(2012)의 사례 연구에서 학생들은 [그림 II-30]와 같이 하나의 패턴에 대해서 다양한 표현을 만들어냈다.

이러한 다양한 표현은 서로 다른 구조적 표현의 동치성을 탐구하게 하고 나아가 대수적 표현의 동치성을 탐구할 수 있게 하는 기회를 제공할 수 있다. 또한 학생과 교사는 거북 표현식을 이용하여 패턴의 구조에 대해 서로 의사소통하고 상호작용할 수 있었으며, 연구자는 거북 표현식으로 학생의 패턴 일반화 과정을 살펴볼 수 있었다.

거북 표현식에서는 변수 n 을 사용할 수 있다. 이는 대수적 변수인 n 과 동일한 역할을 한다. 변수 n 으로 문자의 반복횟수를 표현함으로써 [그림 II-31]과 같이 임의의 n 단계 패턴을 구성할 수 있는 거북 표현식을 만들 수 있다. 그러나 거북 표현식에서 변수 n 의 활용이 항상 학생들의 대수적 이해를 높이는 것은 아니었다. Cho et al.(2012)의 연구에서 일부 학생들은 변수 n 을 사용하여 다양한 패턴 일반화를 성공적으로 수행했음에도 불구하고 변수 n 의 의미를 정확하지 이해하지 못하였다.

거북 표현식이 사용되는 마이크로월드에서는 명령을 실행하면 입체를 즉시 화면에 출력해줌으로써 즉각적인 시각적 피드백을 제공한다. 학생들은

패턴의 구조에 대한 거북 표현식을 작성하고 실행하면 시각적으로 출력되는 입체를 통해 자신의 거북 표현식을 점검할 수 있다.



[그림 II -31] 변수 n 을 이용한 패턴 만들기

III. 안구 운동 추적을 활용한 수학교육 연구

전통적으로 사고발성법 프로토콜에 기초한 면담은 학습에 관한 인지 활동을 조사하는 데 빈번하게 사용되는 중요한 기법이였다(Preissle & Le Compte, 1984). 그러나 이 방법은 종종 타당성 문제로 비판받는다. 이에 교육 연구자들은 다양한 각도에서 학습 과정을 분석하기 위하여 다른 학문 영역에서 개발된 연구방법의 도입을 모색해왔다. 최근 여러 교육 연구자들이 인지 심리학자들이 독서 및 여러 유형의 정보 처리 과제에서의 기본적인 인지 과정을 연구하기 위해 사용해온 안구 운동 추적 기법(Rayner, 1998, 2009)에 주목하기 시작하였다. 본 연구는 객관적인 증거 기반의 연구를 추구한다. 또한 연구 참여자가 도형 패턴을 일반화하는 과정을 시간의 흐름에 따라 자세히 살펴보기 위하여 안구 운동 추적 장치인 아이트래커를 사용하여 학생들의 안구 운동을 문제 해결 과정과 함께 측정하고 분석하였다.

1. 안구 운동과 주의

도형 패턴 일반화에서 시각적 추론이 중요한 역할을 한다는 것을 3.2절에서 살펴보았다. 안구 운동이 기하 문제 해결과 같이 시각적인 다이어그램이 제시되는 수학 문제해결 과정에 관한 여러 가지 가치 있는 사실들을 밝혀주었던 것을 보았을 때, 도형 패턴 일반화에서 안구 운동 분석은 우리가 그동안 보지 못했던 새로운 창을 제공해줄 수 있다.

Rodrigues & Rosa(2016)에 의하면 연구의 영역에 따라 서로 다른 유형의 안구 운동 지표에 집중한다. 예를 들어 읽기 연구에서는 시각적 지표에 집중할 것이고, 시지각 연구에서는 공간적 지표를 중요하게 다룰 것이다. HCI(Human-Computer Interaction) 연구에서는 인지부하와 관련된 동공의 크기, 눈깜박임 횟수와 같은 지표들을 사용하기도 한다. 따라서 안구 운동 추적을 교육적 용도에 사용하기 위해서는 기본적으로 안구 운동과 주의, 지각적 처리의 관계에 대한 이해가 필요하다.

여기에서는 안구 운동이란 무엇이며, 그것이 어떻게 인간의 사고, 즉, 주의와 연결될 수 있고 인간의 수학적 사고에 대해 어떤 부분을 알려줄 수 있는지 살펴본다. 또한 안구 운동 분석이 수학 교육에 적용된 사례를 분석한다.

1.1. 안구 운동의 정의와 유형

사람의 시야는 세 부분 중심와(fovea), 부중심와(parafovea), 주변시(peripheral vision)로 구분할 수 있다. 중심와는 망막의 중심부이다. 부중심와는 중심와를 둘러싼 부분이며 주변시는 부중심와의 외곽 영역을 의미한다. 시력(시각적 해상력)은 중심와에서 제일 좋고 부중심와에서 감소되며 주변시에서는 더 감소한다. 중심와는 원추세포와 시신경 분포의 밀도가 상대적으로 높아 맺힌 대상을 상세히 볼 수 있는 영역으로 시야각 2° 이하에 대응되는 매우 좁고 제한적인 영역이다(Holmqvist et al., 2011). 사람이 어떤 대상을 분명하게 인식하기 위해서는 대상이 중심와에 맺히도록 안구를 회전시켜야 하는데, 이것이 바로 안구 운동이다(Snowden, Thompson, & Troscianko, 2012).

일반적으로 글을 읽거나 장면을 볼 때의 안구 운동은 응시(fixation)⁹⁾와 도약(saccade)으로 구분할 수 있다(이춘길, 2004; Rayner, 2009). 일반적으로 안구가 상대적으로 안정화된 상태를 응시로 정의하고, 2개의 연속된 응시 사이의 빠른 움직임을 도약으로 정의한다. 즉, 사람의 안구는 응시-도약-응시-도약... 의 패턴으로 움직인다. 응시는 일반적으로 100~500ms 정도 지속되며 무엇을 보느냐에 따라 길이가 달라진다. 평이한 한글 문장 읽기에서의 응시는 평균 225ms 정도 유지되고(고성룡, 윤낙영, 2007), 순열 조합 문제해결 과정에서의 응시 길이는 평균 170ms 정도로 나타났다(최인용, 조한혁, 2016). 일반적인 읽기에서 2° 도약은 보통 30ms 정도 소요되고, 일반적인 장면 지각에서는 5° 도약은 40~50ms 정도 소요된다(Rayner, 2009). 정보의 획득이나 처리는 주로 응시에서 일어나며 도약 운동을 하는 동안에는 시각적인 정보가 거의 처리

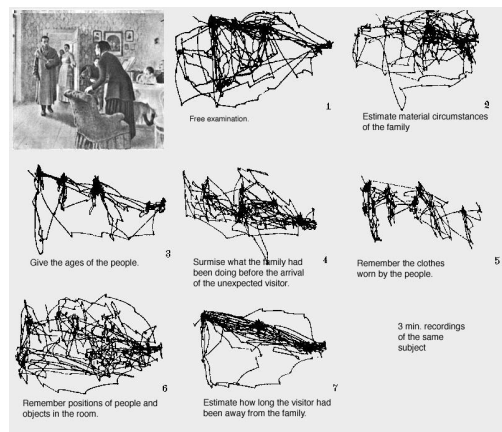
9) 일부 연구에서는 fixation을 ‘고정’으로 해석하기도 한다.

되지 않는다(Holmqvist et al., 2011; Rayner, 2009).

1.2. 안구 운동과 주의

인지과학에서 주의를 일반적으로 ‘인지 자원을 목표와 관련된 정보에 집중시키는 능력’으로 정의된다(Gazzaley & Nobre, 2012). 인간의 선택적 주의 시스템은 지각하고, 이해하고, 구별하고, 회상하고, 반응시간을 단축하는 데 도움을 준다(James, 1890). 수학 문제를 바르게 이해하기 위해서는 문제로부터 핵심정보를 선별하고 주의를 효율적으로 배분하는 것이 중요하다(최인용, 조한혁, 2016).

주의는 자극의 물리적 특성을 기반으로 하는 상향식 과정(bottom-up process)와 관찰자의 사전지식, 목표 및 기대를 기반으로 하는 하향식 과정(top-down process)의 상호작용을 통해 유도된다(Snowden et al., 2012). 이를 각각 상향식 주의와 하향식 주의 또는 외생적(exogenous) 주의와 내생적(endogenous) 주의라 하기도 한다. 방에 있을 때 문이 열리는 소리가 들리면 자동적으로 시선이 문 쪽으로 가는 것이나, 그래프가 제시되었을 때 시각적으로 뽕족한 점이나 극대, 극소와 같은 부위에 시선이 자동으로 가는 것 등은 상향식 주의로 설명될 수 있다. 한편, Yarbus(1967)는 [그림 III-1]과 같이 한 사람에게 동일한 그림에 대한 서



[그림 III-1] 목적에 따른 시선의 차이(Yarbus, 1967, p. 167)

로 다른 질문을 했을 때 서로 다른 안구 운동 패턴이 나타남을 보였다. 즉, 안구 운동은 피험자가 직면한 문제와 그에 따라 그림에서 얻고자 하는 정보(목적)에 따라 달라진다. 이는 하향식 과정에 의한 주의 유도를 잘 보여준다. 일반적으로 특정 목표 없이 제시되는 자극에 대한 자연스러운 관찰에서의 주의 유도에는 상향식 과정의 영향이 크고(Parkhurst, Law, & Niebur, 2002), 목표가 주어진 학습이나 문제 해결 상황에서의 주의 유도에는 하향식 프로세스의 영향이 더 크다(Henderson, Brockmole, Castelhana, & Mack, 2007).

주의는 주로 시각 시스템에 의해 결정되는 인지적 메커니즘이다. 안구 운동을 동반하여 시각과 주의가 일치하는 경우를 외현적 주의(overt attention), 안구 운동을 동반하지 않는 주의를 내현적 주의(covert attention)로 구분한다. 안구 운동과 주의 사이의 연결에 관한 강력하고 영향력 있는 가설 중 하나는 ‘눈-마음 가설(Eye-Mind Assumption)’이다. 눈-마음 가설은 “우리가 보는 것과 우리가 내적으로 처리하고 있는 것 사이에는 감지할만한 차이가 없다(Just & Carpenter, 1980, p. 331)”는 가설이다. 이는 곧 우리가 보는 것과 주의가 일치한다는 가정인데, 시선과 주의를 분리하는 내현적 주의가 가능하다는 실험 결과가 등장하면서 그 신뢰성에 의문이 제기되기도 하였다(e.g. Posner, 1980). 그러나 눈-마음 가설이 최초로 제기된 읽기와 같은 복잡한 정보 처리 과제의 수행 과정에서는 안구 운동과 주의가 밀접하게 연결된다는 것에 대해서는 많은 연구자들이 동의하고 있다(Just & Carpenter, 1980; Rayner, 1998)¹⁰⁾.

Schindler & Lilienthal(2019)는 읽기 연구에서 개발된 눈-마음 가설이 학생들의 기하 문제 해결 과정에서도 성립하는지에 대해 분석하였다. 이들은 기하 문제 해결 과정에서의 안구 운동을 측정한 뒤 시선흐름

10) 단서 패러다임을 이용한 Hoffman & Subramaniam(1995)의 실험에서 피험자들은 눈을 특정 위치로 향하면서 다른 위치에 주의를 집중하기 어려워했다. 즉, 사람은 의도적으로 시선과 주의를 분리할 수 있지만 이는 부자연스럽고 많은 노력을 요구하는 일이다. Moore & Fallah(2001)는 역하 미세자극을 이용하여 눈을 특정 위치로 움직이려는 의도와 연합된 활동을 점화하는 것만으로도 주의가 이동함을 보였다. 이는 주의의 이동과 안구의 이동 사이에 아주 밀접한 연결이 있다는 신경생리학적 증거이다.

(scan-path) 영상에 대한 회상자극면담을 실시하여 실제 학생의 주의와 안구 운동의 일치 여부를 조사했다. 분석 결과 기하 문제 해결 상황에서도 눈-마음 가설이 대부분 성립하였다. 학생들이 문제의 각, 선분 등 기하적 대상을 응시할 때 실제로 그것과 관련된 내적인 처리를 하고 있었다. 그들의 연구에서 관찰된 눈-마음 가설이 성립하지 않는 일부 사례들의 유형은 다음과 같았다.

- 1) 머릿속으로 계산을 하면서 관계없는 부분이나 빈 공간을 응시
- 2) 새로운 접근 방법을 생각하거나 특정 과정을 기억해내면서 왼쪽 상단 부분으로 빠르게 도약
- 3) 실수를 하거나 새로운 방법을 발견했을 때와 같은 정서적 각성과 함께 빠른 도약운동으로 이곳저곳을 응시

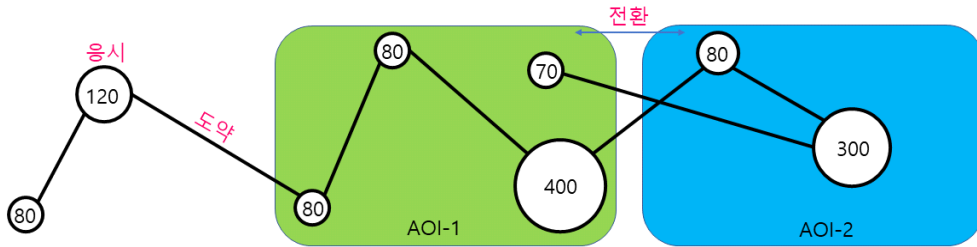
그러나 이렇게 눈-마음 가설이 일치하지 않는 상황에서도 안구 운동 패턴들은 학생의 내적 사고에 대한 힌트를 어느정도 제공했다(Schindler & Lilienthal, 2019). 예를 들어, 빠르게 과제 왼쪽 밖을 올려다보는 도약 운동이 나타나면 피험자가 문제의 시각적 요소와 직접적으로 연결되지 않은 무언가를 내적으로 처리하고 있다고 판단할 수 있었다.

2. 안구 운동과 수학적 인지

우리는 안구 운동이 주의와 밀접하게 연관됨을 살펴보았다. 안구 운동이 선택적 주의에 대해 상당히 신뢰도 높은 추론을 가능하게 하는 것은 사실이지만, 안구 운동만으로 피험자의 내적인 인지 처리 과정을 추론할 수는 없다(Rothkopf, Ballard, & Hayhoe, 2007). 안구 운동 자료는 사람이 어디를 보는지만 알려줄 뿐 왜 그곳을 보는지에 대해서는 알려주지 않기 때문이다. 사고발성법이나 사후면담과 같은 전통적인 방법들은 여전히 교육적으로 가치 있는 방법이지만, 때때로 피험자들의 자신의 인지에 대한 자기보고는 부정확한 경우가 있다(Susac et al., 2014). 따라서 안구 운동 자료는 다른 기존의 검증된 지표나 사고발성법, 회상자극면담, 사후면담과 같은 질적 자료와 함께 보완적으로 분석될 필요가 있다(Hyönä, 2010).

안구 운동 추적은 연구 목적과 분석 방법에 따라 양적 자료와 질적 자료를 모두 산출할 수 있는 장점을 가지고 있다. 안구 운동 자료의 질적 분석은 특정 시간 동안의 안구 운동의 경로와 응시점의 분포를 나타낸 시선흐름(scan-path), 히트맵(heatmap) 등을 통해 이루어질 수 있다. 시선흐름의 경우 실시간으로 시각화되는 응시와 도약이 나타나는 시선흐름 영상을 분석한다. 히트맵(heatmap)은 응시횟수와 응시시간을 색의 스펙트럼으로 나타낸 이미지이다. 히트맵에서는 시간적 정보는 사라지지만 응시의 위치별 밀집도를 확인할 수 있다.

양적 분석은 일반적으로 안구 운동 지표(measure)를 통해 실시된다. 안구 운동의 지표는 응시와 도약, 눈 깜박임과 같은 안구 운동의 사건(event)들을 계산 및 통계처리가 가능하도록 정확하게 정량화한 자료이다. 지표들에 대한 통계 분석을 통해 우리가 설계한 실험에서 측정된 안구 운동 자료가 가지는 의미를 이해할 수 있다. 지금까지 선행연구에 등장한 지표만 해도 수십여 가지가 존재하며 연구 목적에 따라 지표를 직접 만들 수도 있다. 연구의 영역, 연구의 목적, 실험 설계에 따라 적절한 지표를 선택하고 적합한 통계적 처리를 하는 것이 중요하다(Holmqvist et



[그림 III-2] 안구 운동 지표

al., 2011).

관심영역(Area of Interest; 이하 AOI)은 연구자가 안구 운동을 분석하기 위해 실험 자료에 설정한 특정 영역을 말한다. 문제 영역, 보기 영역 등 AOI를 설정한 후 영역별로 안구 운동 지표의 총합이나 평균을 계산하거나 AOI 사이의 이동을 분석한다. 응시 시간(fixation duration)은 안구 운동 추적 연구에서 가장 많이 사용되는 지표 중 하나이다(Holmqvist et al., 2011). 전체 평균 응시 시간이나 AOI별 평균 응시 시간, AOI에 속한 응시 시간의 총합 등의 지표를 계산하여 사용할 수 있다. 예를 들어 [그림 III-2]에서 AOI-1의 총 응시시간은 $80 + 80 + 400 + 70 = 630$ ms 이고,

평균 응시 시간(average fixation duration)은 $\frac{630}{4} = 157.5$ ms 이다. 응시

횟수(the number of fixations 또는 fixation count)는 일반적으로 AOI에 속한 응시 개수의 총합으로 정의한다. 따라서 [그림 III-2]에서 AOI-1의 응시횟수는 4이고 AOI-2의 응시횟수는 2이다. 한 AOI에서 다른 AOI로 응시가 이동하는 것을 전환(transition)이라 한다. AOI 간의 전환횟수를 계산할 수 있으며, 이를 이용하여 전환 행렬(matrix)을 만들어 마르코프 체인 등의 분석이 가능하다(e.g. Hayes, Petrov, & Sederberg, 2011; Lee & Wu, 2018). 예를 들어 [그림 III-2]에서 두 AOI 사이의 전환횟수는 2이다.

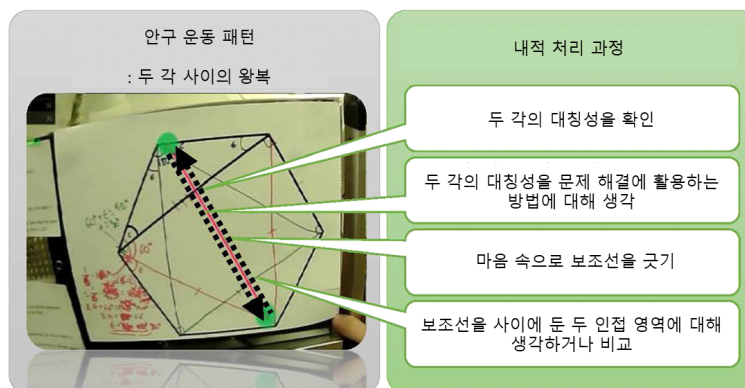
동일한 지표도 과제와 상황에 다양하게 해석된다. 예를 들어, 읽기에서 자주 사용되지 않은 단어는 어휘 활성화(lexical activation process)가 오래 걸리기 때문에 긴 응시가 나타난다(Rayner, 1998). 골키퍼의 경우 전

문가가 초심자보다 적은 수의 긴 응시를 보이는데, 이는 인지 처리의 어려움보다는 한 번의 응시로부터 많은 정보를 추출하는 효율성 측면에서 해석된다(Savelsbergh, Williams, Kamp, & Ward, 2002). 따라서 교육연구에서 안구 운동과 관련된 지표와 학습의 결과 또는 인지 능력 지표 사이의 간극을 연결하는 것은 중요한 과제이다(Mayer, 2010, p. 170).

2.1. 안구 운동을 이용한 수학적 인지 처리 과정의 추론

주의와 안구 운동은 많은 경우 일치하며 밀접하게 연관된다(Just & Carpenter, 1980; Rayner, 1998). 그러나 안구 운동 패턴을 이용하여 인지 과정을 추론할 때의 어려움 중 하나는 안구 운동, 즉 외현적 주의의 이동 패턴이 내적인 처리 과정과 1:1로 대응되지 않는다는 점이다. 하나의 인지 처리 과정이 특정 안구 운동 패턴으로 나타날 수 있지만, 역으로 하나의 안구 운동 패턴이 하나의 인지 처리 과정에 유일하게 대응되지는 않는다(Rothkopt et al., 2007). 따라서 안구 운동 분석을 통해 매 순간 내적으로 처리되는 과정에 대해 추론하는 것은 쉬운 일이 아니다.

Schindler & Lilienthal(2019)의 연구에서 정육각형의 마주보는 두 각 사이를 왕복하는 안구 운동 패턴은 [그림 III-3]와 같이 4가지 서로 다른 문제 해결과 관련된 인지 과정에서 나타났다.



[그림 III-3] 안구 운동 패턴의 4가지 서로 다른 해석(Schindler & Lilienthal, 2019, p. 135.)

ViViani(1990)은 안구 운동을 분석하는 유형의 연구에 내재된 일반적인 문제들을 논의하면서 하나의 유용한 접근법으로 특정한 이론적 틀 안에서 분석하는 것을 제안한 바 있다. 실제로 수학교육과 관련된 여러 연구들이 이론적 틀을 기반으로 안구 운동을 해석하였다. 읽기 연구로부터 제기된 눈-마음 가설로 인해, 수학교육 맥락에서 안구 운동 추적을 사용한 초기 연구들은 산술 문장제에 관한 것이었다(de Corte, Verschaffel, & Pauwels, 1990; Hegarty, Mayer, & Green, 1992). Hegarty et al.(1992)는 Mayer(1985)의 문제 해결 4단계를 이론적 틀로 피험자가 초기에 문장제를 처음부터 끝까지 읽는 부분을 문제 해석 단계로 구분하고 그 이후부터 문제 해결 방법을 말할 때까지를 문제통합 및 계획수립 단계로 구분하여 각각의 단계에 사용된 시간을 구하였다. 그들은 문제의 진술 방식이 문제통합 및 계획 실행 단계의 처리 시간의 증가를 가져온다고 분석하였다.

Andrá et al.(2015)는 일차함수에 대한 식, 그래프, 텍스트 표현 사이의 변환에 대해 조사하였다. 그들은 문제와 4개의 보기 모두를 차례로 응시하는 ‘전체적으로 보기’ 패턴과 문제와 특정 보기 사이를 왕복하는 ‘썩지어 보기’ 패턴을 각각 Kintsch(1998)의 텍스트 처리의 미시적, 거시적 수준의 인지 과정과 관련된 것으로 보고 문제 유형별 안구 운동의 차이를 분석하였다. 분석 결과 문제가 식의 형태일 때 ‘전체적으로 보기’ 패턴이 많이 나타났는데 식은 짧고 간단하지만 그 안에 많은 정보를 함축하고 있기 때문으로 해석하였다.

Lin & Lin(2014)은 삼각형의 답을 이용하여 변의 길이를 구하는 기하 문제에서의 안구 운동을 분석하였다. 시선 흐름과 히트맵 분석을 통해 문제를 해결하지 못한 학생과 해결한 학생의 안구 운동을 질적으로 분석하여 다음과 같은 세 가지 특징을 발견하였다.

- 1) 삼각형 전체를 광범위하게 응시했다.
- 2) 삼각형에서 주어진 길이와 같은 정보에 상대적으로 길게 응시했다.
- 3) 2개의 답은 삼각형의 교점 주위를 상대적으로 길게 응시했다.

이들은 그래프 이해 모델(Carpenter & Shah, 1998; Ratwani, Trafton, & Boehm-Davis, 2008)을 기반으로 문제를 제대로 풀지 못한 학생들의 안구 운동 특징을 시각적 청크의 공간적 관계를 형성하는 시각적 통합 단계와 패턴을 양적, 질적 의미로 변환하고 이 정보를 자신들의 기억과 관련시키는 인지적 통합 단계에서 어려움을 겪은 증거로 해석하였다.

최인용, 조한혁(2016)은 English & Halford(1995)의 문제 이해 모델과 Mayer(1992)의 문제 해결 단계를 기반으로 순열 조합 문장제의 이해 과정에 대한 인지 모델을 도출하고 이를 이용하여 안구 운동을 해석하였다. 분석 결과 연구 참여자들의 문장제 이해 전략은 문제에 대한 수학적 모델을 내적으로 직접 표상하는 전략과 객관식 보기에 주어진 표현과 문제의 상황을 비교하여 답을 찾는 전략으로 구분할 수 있었다.

Lee & Wu(2018)는 텍스트가 함께 제시되는 기하 문제의 읽기가 텍스트 중심인지 그림 중심인지 분석하였다. 80% 이상의 참가자가 텍스트를 먼저 읽기 시작하다 텍스트에 해당하는 그림의 요소가 있으면 그것을 응시한 후 다시 텍스트로 돌아오는 텍스트 중심의 읽기 패턴을 보였다. 그들은 텍스트와 그림 이해에 관한 통합 모델(Schnotz & Bannert, 2003)을 바탕으로 텍스트 주도 패턴이 독자가 텍스트를 사용하여 기하적 요소 간의 초기 공간 관계를 구성한 다음 그림을 사용하여 표상을 확인하는 과정의 증거로 해석하였다.

이상의 연구(최인용, 조한혁, 2016; Andr  et al., 2015; Lee & Wu, 2018; Lin & Lin, 2014)들은 기존의 경험적인 연구를 통해 개발된 이론적 틀 안에서 안구 운동의 인지적 의미를 해석한 것으로 볼 수 있는데, 주로 텍스트 이해나 그래프 이해 등 표상의 이해 모델이 사용되었다.

안구 운동 자료는 다른 객관적인 지표나 사고발성법, 회상자극면담, 사후면담과 같은 질적 자료와 함께 보완적으로 분석될 필요가 있다(Hy n , 2010). 몇몇 수학교육의 연구들은 전통적인 질적 연구의 자료들과 안구 운동 자료를 상호보완적으로 분석하였다. Epelboim & Suppes (2001)는 기하 문제 해결을 하는 3명의 학생(2명의 전문가, 1명의 초심자)의 안구 운동과 사고발성을 동시에 측정하였다. 그들은 시선 흐름을 사고발성법

프로토콜과 함께 기록하여 시간의 흐름에 따른 인지 처리 과정을 분석하였다. 전문가의 문제의 그림에는 존재하지 않지만 문제 해결에 핵심적인 가상의 삼각형을 안구 운동으로 그렸지만, 초심자는 그리지 않았다. 이러한 가상의 삼각형은 안구 운동이 단순히 지각적인 과정(예를 들면 게슈탈트 폐쇄성의 법칙)이 아니라 문제에 대한 고차원적 추론을 반영한다는 근거로 볼 수 있다. 또한 사고발성 프로토콜을 함께 분석함으로써 내적으로 계산하는 동안에는 시선이 그림 밖의 여백을 응시하는 경향이 있다는 것을 발견하였다. 문제 해결 전반에 걸쳐 이전에 응시했던 도형의 구성요소를 반복해서 재응시하는 패턴을 시각적 작업 메모리의 용량이 작다는 증거로 파악했다. 그는 안구 운동이 단순히 프로토콜을 반영하는 것이 아니라 문제를 해결하는 데 사용되는 인지 및 지각 과정을 모델링하는 데 유용한 추가 정보를 가지고 있다고 주장하였다(Epelboim & Suppes, 2001, p. 1567.).

Susac et al.(2014)는 3가지 유형의 간단한 방정식 문제를 해결하는 대 학생의 안구 운동을 분석하였다. 이들은 안구 운동 측정이 끝난 후 사후 면담을 통해 방정식을 다 풀고 보기를 보았는지, 방정식을 풀기 전에 보기를 먼저 보았는지 여부와 세 가지 유형의 방정식에 대한 난이도를 조사하였다. 그런데 항상 방정식을 풀고 난 후에 보기를 확인했다는 15명의 학생의 시선경로를 분석해보니, 전체 51.5%의 문제에서 보기를 중간에 먼저 본 것으로 확인되었다. 또, 응시횟수는 참가자에 의해 보고된 난이도 순서나 반응시간보다도 역효율 점수(inverse efficiency score; IES)¹¹⁾로 계산한 난이도를 더 잘 예측하였다. 이는 연구 참여자들의 자신의 안구 운동에 대한 메타인지 혹은 자기보고가 이상적이지 않음을 보여주는 것이다.

이미진, 이광호(2015)는 초등학생을 대상으로 $a+b+c = __ + d$ 꼴의 방정식을 해결하는 안구 운동을 분석하였는데, 사후면담을 통해 학생들이 사용한 전략을 조사한 후 전략에 따라 안구 운동의 차이가 있는지 조사하

11) 역효율 점수는 속도와 정확도를 결합한 지표로 반응시간을 정답률로 나눈 것이다. 예를 들어 어떤 학생의 평균 반응시간이 652ms 이고 정답률이 5%이면 역효율 점수는 $652/0.95 = 686\text{ms}$ 가 된다(Bruyer & Brysbaert, 2011)

였다. 이들은 시선 흐름만으로도 어느 정도 해결 전략을 짐작할 수 있다고 보고하였다.

때때로 주의의 공간적인 이동 패턴이 인지 전략과 강하게 연결되는 과제에서는 안구 운동으로부터 직접 인지 전략을 추론하기도 한다. 예를 들어, Obersteiner & Tumpek(2016)는 안구 운동을 이용하여 분수의 대소 비교가 문제의 유형에 따라 부분적 전략과 전체적 전략이 사용되는지 여부를 조사하였는데, 공통 분모 문제에서 분모보다 분자에 응시횟수가 많고, 두 분자 사이의 전환횟수가 많은 것으로부터 분자만을 비교하는 부분적 전략을 사용한 것으로 추론하였다. 마찬가지로 공통 분자 문제에서는 분자보다 분모에 응시횟수가 많고, 분모 사이의 전환횟수가 많았는데, 이 역시 부분적 전략을 사용한 것으로 해석하였다. 마지막으로 분모 분자가 모두 다른 분수의 경우 분자, 분모의 응시횟수의 차이가 통계적으로 유의하지 않고 한 분수 내에서 분자와 분모 사이의 전환횟수가 많다는 것으로부터 전체적 전략을 사용한 것으로 해석하였다. 이미진, 이광호(2015)와 Chesney, McNeil, Brockmole, & Kelley(2013)의 연구는 $a+b+c = _ + d$ 꼴의 방정식에서의 안구 운동을 분석하였는데, 등호의 양옆을 가로지르는 패턴을 관계적 스키마의 활성화와 관련된 것으로 해석하였다. 실제로 등호의 양옆을 가로지르는 횟수는 올바른 전략 사용을 예측하는 변수였다. Epelboim & Suppes(2001)에서 보조선을 긋는 안구 운동 패턴과 같이 외현적 주의의 이동이 내적인 인지처리 과정의 보다 직접적인 표현이 되는 경우가 상황과 맥락에 따라 존재하는 것으로 판단된다.

2.2. 수학적 문제해결에서 안구 운동 지표의 해석

학생들은 기초적인 비교 문장제(compare problem)에서 문제의 진술방식(더 많이/더 적게)과 문제 해결에 필요한 연산(덧셈/뺄셈)이 일치하지 않는 불일치 문제를 더 어려워하는데, 일치 문제보다 불일치 문제에서 핵심 단어들에 대한 응시 시간이 길고(de Corte et al., 1990), 응시 횟수가 많았다(Hegarty et al., 1992).

순열 조합 문장제의 경우도 의미 구조의 변환이 필요한 문제를 풀 때 학생들은 문제의 핵심정보를 더 많이 보고, 보기를 더 오래 응시하였으며, 문제와 보기 사이의 시선 전환을 많이 하였다(조한혁, 최인용, 2016).

Andrá et al.(2015) 연구에서 문제가 식으로 주어졌을 때의 정답률이 가장 낮았는데, 그래프를 읽을 때보다 식을 읽을 때, 상대적으로 적은 수의 긴 응시가 나타났다. 간단한 방정식 문제의 경우 어려운 문제일수록 응시횟수가 많았다(Susac et al., 2014).

Lin & Lin(2014)은 답음을 이용하여 변이나 각의 길이를 구하는 유형의 기하 문제에서의 안구 운동을 분석하였다. 이들은 인지 부하 설문(NASA-TLX)으로 피험자의 문제별 체감난이도를 조사하고, 이 체감난이도에 안구 운동 지표가 민감하게 반응하는지 여부에 대해 분석하였다. 그 결과 어려운 문제에 대해 체류 시간이 길고, 응시횟수가 많았으며, 텍스트와 도형 사이의 전환횟수도 더 많았다.

간단한 방정식을 해결하는 성인 대학생의 경우 정답률이 높은 전문가 그룹이 정답률이 낮은 그룹보다 응시횟수가 적었고, 어려운 문제일수록 응시횟수가 증가하였다(Susac et al., 2014). 이들은 전문가들은 이미 효율적인 전략을 갖추고 있어서 어디를 볼 지 이미 알고 있기 때문으로 해석했다.

비교 문장제에서 정답률이 높은 학생들의 경우 문장을 읽는 횟수가 늘어날수록 문장 내에서 응시하는 단어의 수가 줄어드는 갈때기 효과(the funner effect)가 관찰된다(Hegarty et al., 1992). 이러한 효과는 최인용, 조한혁(2016)의 순열 조합 문장제에 관한 연구에서도 유사하게 나타났다. 전문가 집단은 문제의 핵심정보를 빠르게 파악하고 집중하였는데, 문제 영역의 응시의 대부분은 대상의 구별성, 중복가능성, 파라미터(m 과 n), 의미구조와 관련된 서술어 등 문제해결에 필요한 핵심정보에 집중되어 분포했으며 문제 해결과 관련성이 적은 정보는 최초 응시 이후에는 거의 응시가 일어나지 않았다.

Andrá et al.(2009) 연구에서 초심자는 문제와 4개의 보기를 균등하게 이곳저곳 응시하는 패턴이 나타나지만 전문가의 경우 문제와 몇 개의 유

력한 보기에 응시가 집중되는 경향이 나타났다. 또 전문가의 안구 운동은 초심자보다 체계적으로 움직이는 경향이 있었다. 이슬, 장혜원(2018)의 전개도 문제해결에서도 공간감각 상위집단은 정답 영역을 응시하는 비율이 높았으며, 상대적으로 짧은 응시를 통해 시각적 정보를 처리하였다. 이는 전문가가 비전문가와 비교할 때 전문가가 응시시간이 짧고 과제 관련 영역에 대한 응시횟수가 많으며 과제와 관련이 없는 의미없는 영역에 대한 응시횟수가 적었다는 전문성 영역에서 안구 운동 추적 연구의 메타 분석 결과(Gegenfurtner, Lehtinen & Säljö, 2011)와 일치하는 경향이다.

이상으로부터 선행연구는 수학적 문제 해결 상황에서 전문가와 초심자의 안구 운동 지표를 비교하거나 문제의 난이도에 따른 안구 운동 지표의 차이에 대해 분석하였음을 알 수 있다. 그러나 안구 운동 지표 역시 과제의 맥락에 따라 서로 다른 양상을 보이는데, 예를 들면 비교 문장제에서는 어려운 문제에서 핵심 정보에 대한 응시횟수가 많았지만(de Corte et al., 1990), 수학적 표현을 변환하는 과제에서는 함축적인 식을 해석할 때 응시횟수가 오히려 상대적으로 적었다(Andrá et al., 2015).

IV. 연구 1: 패턴 일반화의 과정과 어려움

연구 1에서는 안구 운동 추적 실험과 회상자극면담을 통해 형식적인 대수를 배운 중학생이 도형 패턴을 일반화하는 과정에서 시도하는 행동의 유형과 역할, 일반화하는 과정에서 겪는 어려움의 유형과 원인에 대해 분석하였다. 또한 안구 운동 지표를 통해 학생들의 시각적 주의의 특성에 대해 분석하였다.

1. 연구방법

1.1. 연구 참여자

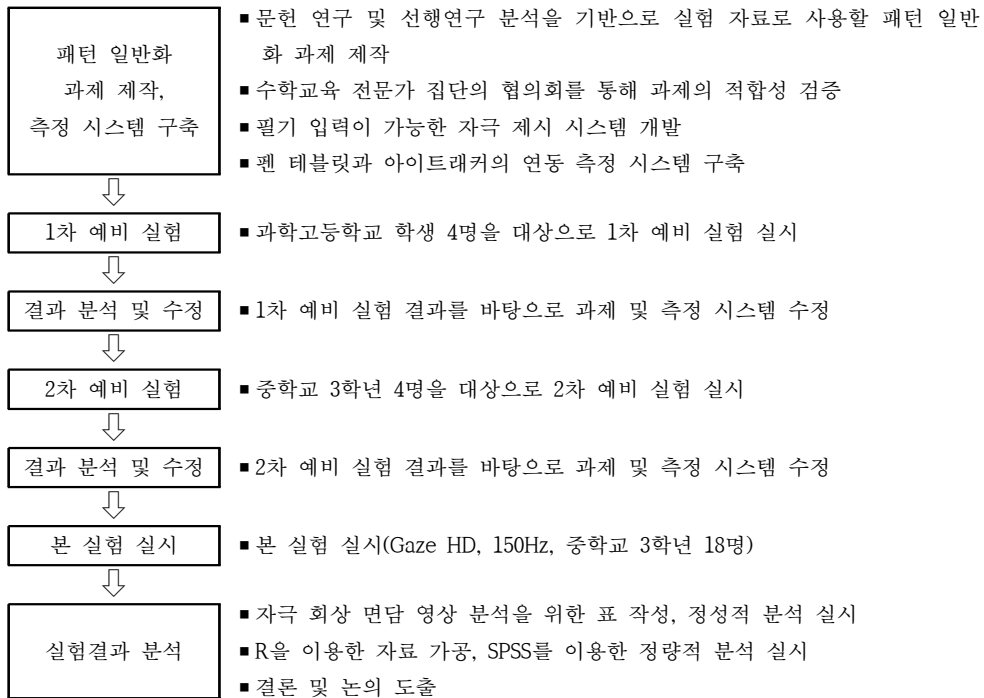
본 연구의 참여자는 경기도 시흥시 소재 중학교 3학년 학생 18명(남학생 9명, 여학생 9명)으로, 이들은 서울대학교 사범대학과 경기도 시흥시의 학관 협력 사업으로 연 단위로 진행되는 수학·정보 융합 교육 프로그램에 참여하는 성실하고 학업 열의가 높은 학생이다. 이 학생들은 중학교 2학년 1, 2학기의 수학 교과 성취도가 A 또는 B이고 경시대회 준비 경험이 없었다는 점에서 중상위권 일반학생으로 분류할 수 있다. 선행학습 여부를 조사한 결과 s8만 고2 교육과정까지 선행을 하였다고 응답하였고 다른 참여자들은 고등학교 과정을 선행하지 않았다고 응답하였다. 연구 참여자들은 중학교 3학년이기 때문에 학교에서의 정규 수업을 통해 문자와 식, 일차함수에 대해 학습한 상태였다. 연구 참여자들에게 본 연구와 관련한 안내를 한 후 학부모와 학생 본인의 동의를 얻어 연구를 수행하였다.

1.2. 연구 절차

모든 연구 절차는 서울대학교 생명윤리위원회의 승인¹²⁾을 받은 후 진

12) IRB No. 1904/003-007

〈표 IV-1〉 연구 1의 연구 절차



행되었다. 연구 1의 연구 절차는 〈표 IV-1〉과 같다.

문헌 연구와 선행연구 분석을 통해 패턴 일반화 과제를 제작한 후 수학교육공학 전문가 1명, 교사로 재직 중인 박사 과정 대학원생 1명, 교사로 재직 중인 석사 과정 대학원생 3명을 포함한 전문가 집단의 정기적인 세미나를 통해 과제의 적합성을 검증하고 수정·보완하였다. 실제 종이 위에 수학 문제를 풀듯이 모니터에 제시된 과제를 펜 태블릿으로 필기하며 풀 수 있는 자극 제시 시스템을 설계하여 직접 개발하였다.

1차 예비 실험은 아이트래커 측정 시스템을 점검하고 과제의 의도가 어떻게 전달되는지 확인하는 것을 목적으로 과학고등학교 학생 4명을 대상으로 실시하였다. 2차 예비 실험은 본 실험의 연구 참여자와 동일한 중학교 3학년 학생 4명을 대상으로 과제의 적합성을 확인하기 위한 목적으로 실시하였다. 또 아이트래커 측정이 끝난 후 바로 이어지는 회상 자극면담에서 학생들이 시선 흐름 영상을 보고 어느 정도까지 자신의 생각

을 말할 수 있는지, 연구자는 어떤 발문을 해야하는 지에 대해 주로 확인하였다. 2차에 걸친 예비 실험 후 주요 수정 사항은 다음과 같았다.

- 1) 예비 실험에서는 n 단계의 개수를 묻는 문항에서는 그림을 그리지 않게 하였다. 그러나 일부 학생들이 n 단계를 구하면서 수치적 접근으로 회귀하였다. 또 n 단계의 식만으로는 학생들이 패턴의 구조를 어떻게 분할했는지 정확히 파악하기 힘들었다. 따라서 n 단계의 개수를 묻는 문항에서도 ...을 이용하여 n 단계의 일반적인 형태를 그리고 그림을 이용하여 식을 쓰도록 변경하였다.
- 2) 예비 실험에서는 펜 태블릿의 사용에 익숙해지는 시간을 배치하지 않았기 때문에 일부 학생들이 사용에 어려움을 겪었다. 따라서 검사 실시 전에 이 름 쓰기, 수식 쓰기 등 모니터 화면을 바라보면서 펜 태블릿으로 필기를 하는 연습 시간을 추가하였다.
- 3) 문제에서 4단계와 7단계를 그리도록 요구했음에도 불구하고 그림을 그리지 않거나 그림에 수치를 표시하지 않는 학생들이 있었다. 따라서 검사 전에 예시문제를 이용해서 각 소문항에서 요구하는 과업 내용에 대해 최대한 자세히 설명하는 절차를 추가하였다.

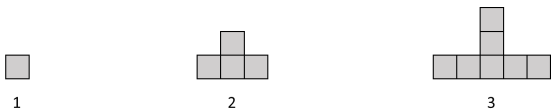
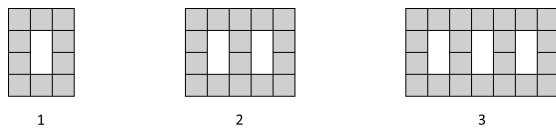
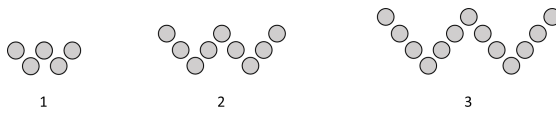
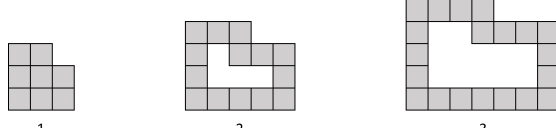
예비 실험 결과를 토대로 본 실험을 설계하였고 gazept사의 GP3 HD 아이트래커를 사용하여 본 실험을 실시하였다. 시선 흐름 영상, 회상 자극면담 영상, 안구 운동 자료를 정량적·정성적으로 분석하여 학생들의 일반화 수행 내용, 행동, 시각적 주의, 오류의 과정 및 원인을 분석하였다.

1.3. 검사 도구

1.3.1. 과제

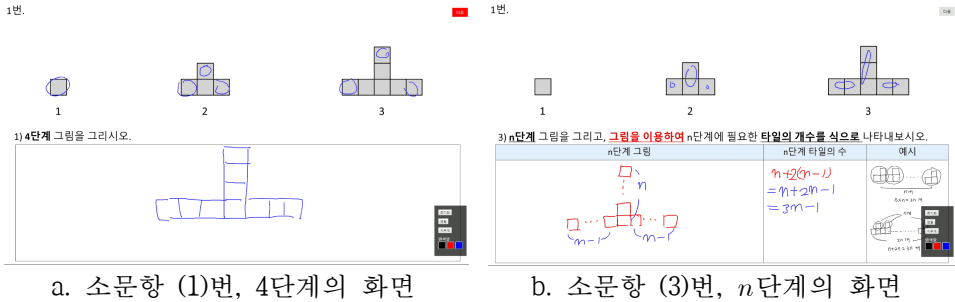
이론적 배경에서 살펴보았듯이 선행연구에서 사용되었던 시각적 선형 패턴들은 구조적 특성에 의해 크게 6가지 유형으로 분류할 수 있다. 그 중 난이도가 쉬운 반복패턴이나 복잡한 유형6을 제외한 후 <표 IV-2>와

<표 IV-2> 과제에서 사용된 도형 패턴

번호	도형 패턴	일반식	선행연구
1	<p>역T 패턴</p>  <p>1 2 3</p> <p>(1) 4단계 그림을 그리시오. (2) 7단계 그림을 그리고, <u>그림을 이용하여</u> 7단계에 필요한 <u>타일의 개수를 식으로 나타내보시오.</u> (3) <u>n단계</u> 그림을 그리고, <u>그림을 이용하여</u> n단계에 필요한 <u>타일의 개수를 식으로 나타내보시오.</u></p>	$3n - 2$	Smith et al.(2007), Friel & Markworth (2009), Rivera & Becker(2011)
2	<p>창문 패턴</p>  <p>1 2 3</p> <p>(1번과 동일)</p>	$6n + 4$	Mavrikis et al.(2012)
3	<p>W 패턴</p>  <p>1 2 3</p> <p>(1번과 동일)</p>	$4n + 1$	Rivera & Becker(2007), River & Becker(2011)
4	<p>닫힌 패턴</p>  <p>1 2 3</p> <p>(1번과 동일)</p>	$6n + 2$	visualpatterns.org

같이 4개 유형의 패턴으로 과제를 구성하였다. 동일한 유형의 패턴이라고 하더라도 맥락과 소재에 따라 학생들의 일반화 수행 정도가 달라지기 때문에(이명기, 나귀수, 2012), 정사각형 또는 원형의 타일로 된 패턴으로만 과제를 구성하였다. 4번 문제의 경우 선행연구에서 사용된 적이 없는 패턴으로 형 우수성이 상대적으로 좋지 않고 생소한 패턴에서 학생들의 패턴 일반화 과정과 행동을 살펴보기 위하여 도형 패턴 사이트인 visualpattern.org에서 유형4-1 해당하는 닫힌 패턴 중 한 가지를 연구자가 선정하였다.

1차 예비실험에서는 “○단계에 필요한 타일의 개수를 구하고 그렇게



[그림 IV-1] 4단계와 n단계 문항의 제시 화면 예시

생각한 이유를 쓰시오”와 같이 선행연구(e.g. Jurdak & El Mouhayar, 2014; Lannin, 2005)에서 사용하였던 질문방식을 사용하였다. 그 결과 학생들의 수치적 전략이 두드러졌다. 반복하여 언급하였듯이 본 연구의 목적은 전략 선택을 조사하는 것이 아니라 대수적으로 의미 있는 패턴 일반화 과정(Rivera, 2010a), 즉 도형적 추론을 통해 패턴을 일반화하는 과정에서 중학생들의 인지적 행동과 시각적 주의를 살펴보는 것이다. 따라서 학생들의 도형적 추론을 유도하기 위한 Friel & Markworth(2009)의 가이드 라인을 참고로 패턴을 구성하는 대상들 사이에 내재된 관계를 시각적으로 발견하고 함수로 일반화할 수 있도록 질문을 수정하였다. 각 문제는 3개의 문항으로 구성된다. 1번 문항은 [그림 VI-1.a]와 같이 패턴의 시각적 특성에 주의를 기울일 수 있도록 하면서 패턴을 4단계까지 그려서 확장하도록 요구하였다. 2번 문항은 7단계 패턴을 그리도록 요구한 후, 그림을 이용하여 7단계 타일의 수를 계산하는 방법을 설명하도록 요구하였다. 3번은 기호적 일반화를 요구하는 문항으로 [그림 VI-1.b]와 같이 n단계 그림을 그린 후, 그림을 이용하여 n단계 타일의 수를 계산하는 식을 쓰도록 요구하였다. 또한 7단계와 n단계의 경우 [그림 VI-1.b]의 오른쪽 하단에서 볼 수 있듯이 도형적 접근을 유도하고 과제에서 요구하는 과업을 구체적으로 알려주기 위해 그림에 수를 표시하는 방법에 대한 예시를 제공하였는데, 과제에서 사용되지 않은 단순한 유형1의 반복패턴 중 한 가지를 예시로 사용하였다.

본 연구에서는 패턴을 직접 펜 태블릿으로 그려야 한다는 점을 고려

<표 IV-3> 실험에서 사용된 패턴의 구조적 특성

문제	패턴의 구조적 특성
1	$n-1$ 단계가 n 단계에 포함되기 때문에 단계 사이의 차이를 시각적으로 인식하는 것이 쉽다. 또한 정중앙의 불변하는 1개의 정사각형이 항상 같은 위치에 있으므로 불변하는 부분도 시각적으로 파악하기 쉽다. 아랫변이 2씩 성장하지만 좌우 대칭으로 1씩 성장하는 부분을 통해 쉽게 파악할 수 있다. 성장 부위들이 세 방향으로 동일하다는 관계를 맺고 있다. 형우수성이 좋은 문항이다.
2	AB, ABB, ABBB 와 같은 형태의 성장패턴으로 $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되기 때문에 단계 사이의 차이(역 ‘ㄷ’)를 시각적으로 발견하기 쉽다. 그러나 닫힌 구조이고 단계별 차이가 타일 1개가 아니라 역 ‘ㄷ’ 모양이기 때문에 1번보다는 인식이 어렵다. 닫힌 구조이므로 넓이로 접근하는 보조 기반 일반화가 가능하다.
3	$n-1$ 단계가 n 단계에 포함되지 않으므로 단계 사이의 차이를 인식하는 것이 1, 2번보다 어렵다. 모든 패턴에 공통적으로 존재하는 아래 끝과 윗쪽 끝 부분의 총 5개의 타일의 공간적 위치가 단계별로 계속 변화한다. 전체 모양은 대칭적이지만 중간 2개의 변과 양 끝의 변이 동일하게 변화한다고 볼 수 없다.
4	$n-1$ 단계가 n 단계에 포함되지 않으므로 단계 사이의 차이를 인식하는 것이 어렵다. 불변하는 부분(꼭짓점)의 공간적 위치가 계속 변화하고 성장하는 부분과 불변하는 부분이 연결되어 있으므로 단계별 변화를 시각적으로 파악하기 어렵다. 아랫변은 2씩 성장하지만, 윗변을 이용하면 일반식을 추론할 수 있다. 닫힌 구조이기 때문에 넓이를 이용하는 보조 기반 일반화와 변환 기반 일반화도 가능하다.

하여 4단계를 근 일반화, 7단계를 원 일반화 문항으로 구분하였고¹³⁾ n 단계를 기호적 일반화 문항으로 분류하였다. 학생들의 패턴 일반화 과정은 패턴의 유형에 따라 달라지기 때문에 패턴의 시각적 특성을 고려하여 그

13) 재귀적인 관계만을 이용하여 그 값을 구하기 어려운 큰 단계는 재귀적 관계에서 함수적 관계로의 전환을 유도하는 효과가 있다(김성준, 2003). 따라서 일반적으로 선행연구에서는 20이상의 큰 단계를 원 일반화 문항으로 분류한다(Rivera, 2013; Stacey, 1989). 그러나 본 연구는 선행연구와 달리 7단계를 직접 그리도록 요구하였으며, 실험 실시 전에 예시 문항을 통해 7단계를 그리고 그림에 자신이 구조를 어떻게 이해했는지 표시한 후 타일의 수를 식으로 나타내야 한다는 과업에 대해 자세히 설명하였다. 따라서 학생들이 7단계에서 함수적 관계를 찾을 것으로 판단하여 원 일반화 문항으로 분류하였다.

과정을 분석해야 한다(Rivera, 2010a). <표 IV-3>은 각 문제의 구조적 특징에 대한 설명이다. 문제2는 AB, ABB, ABBB, ... 꼴의 성장패턴인 반면, 문제1, 문제3, 문제4는 닳은꼴로 성장하는 성장패턴(이하 닳은꼴 성장패턴)이다.

1.3.2. 필기 입력이 가능한 자극 제시 시스템

필기 입력이 가능한 자극 제시 시스템은 HTML Canvas에 마우스나 태블릿 등으로 손글씨 쓰기가 가능한 오픈소스 라이브러리인 atrament.js¹⁴⁾를 활용하여 웹앱 형태로 연구자가 직접 개발하였다. [그림 IV-1]은 1번 문제의 근 일반화 문항의 자극 제시 화면이다. 화면 전체가 문제를 배경으로 하는 하나의 스케치 패드로 구성되어 있어 마치 종이에 연필로 필기를 하듯이 어느 위치에나 자유롭게 필기를 할 수 있다. 오른쪽 하단에 도구 상자를 제공하여 화면 전체의 필기를 초기화하거나 일부를 지울 수 있게 하였고 패턴을 그리거나 구조를 표시할 때 3가지 색의 펜을 선택하여 사용할 수 있도록 하였다. 실험 참가자들이 그림을 그리고 답을 필기할 수 있는 공간을 최대한 확보하면서도 패턴의 크기를 최대한 키우기 위해 예비 실험을 통해 타일의 크기를 결정하였다. 23인치 모니터를 기준으로 1단계와 3단계를 각각 모니터 화면 양 끝으로부터 5cm 떨어지게 배치하고, 2단계를 1단계와 3단계의 정중앙에 배치하였다. 또한 각 단계 그림의 밑변이 수평하게 일치하도록 배치하였다.

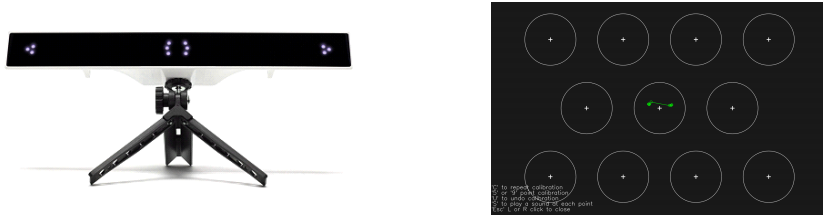
1.4. 자료 수집 및 분석 방법

1.4.1. 아이트래커

아이트래커는 인간의 안구 운동을 거의 실시간¹⁵⁾으로 측정하여 매 순간 피험자의 중심좌가 어느 위치를 향하고 있는지 알려준다. 본 연구에

14) <https://github.com/jakubfiala/atrament.js>

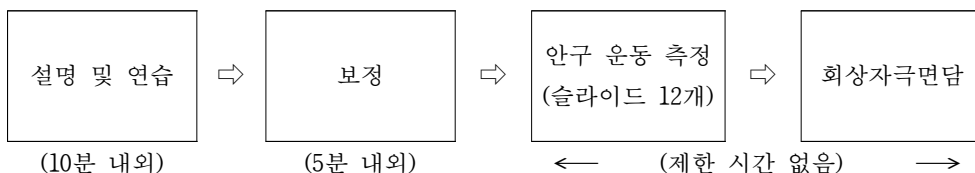
15) 장치의 성능에 따라 60Hz~1000Hz의 시간해상도로 측정한다.



[그림 IV-2] GP3 HD 아이트래커와 11-point 보정 화면

서 사용한 아이트래커는 [그림 IV-2]의 GP3 HD(gazepoint社) 모델로 150Hz에 해당하는 샘플링 속도를 가지고 있으며 $0.5^{\circ} - 1.0^{\circ}$ 의 공간해상력을 가지고 있다. 휴대용 타입으로 24인치 이하의 모니터 하단에 배치하면 적외선 카메라를 통해 실험참여자 화면을 보는 동안 안구 운동을 추적하고 기록한다. 이 장치의 가격은 \$1,995으로 SMI社나 Tobii社의 아이트래커가 \$20,000 이상을 호가하는 것을 감안하면 저가형으로 분류될 수 있다. Zugal & Pinggera(2014)는 저가형 아이트래커인 GP3가 연구에 사용될 수 있을 정도의 측정 정확도를 가지고 있는 실험을 하였다. 이들은 피험자들에게 화면의 특정 위치를 보도록 요구한 후 측정된 값과 실제 값을 비교하여 오차를 분석하였다. 분석 결과 절적인 거리의 유지, 광택이 있는 물체의 제거 등의 전제 조건이 충족되면 GP3는 응시와 도약을 중심으로 하는 인지 처리 과정을 조사하는 연구를 하기에 충분한 정확도를 확보할 수 있었다. 보정(calibration) 이후에는 머리의 자연스러운 움직임이 어느 정도 허용된다. 본 연구는 양안 추적 모드를 사용하였으며 150Hz의 샘플링 속도로 측정하였다.

1.4.2. 자료 수집



[그림 IV-3] 본 실험 설계

본 실험은 교육 프로그램의 일정에 맞추어 2019년 5월 11일부터 7월 10일까지 이루어졌다. 본 실험은 [그림 IV-3]와 같이 설명 및 연습→보정(calibration)→검사→회상자극면담 순서로 설계하였다.

안구 운동 측정

아이트래커 측정을 실시하기 전 설명 및 연습 단계에서는 먼저 펜 태블릿과 측정 환경에 익숙해질 수 있도록 이름 쓰기, 수식 쓰기 등 모니터 화면을 바라보면서 펜 태블릿으로 필기를 하는 연습을 약 5분 정도 진행하였다. 그 후 예시문제를 통해 문제의 각 소문항에서 요구하는 과업 내용에 대해 최대한 자세히 설명하였는데, 7단계와 n 단계의 경우 그림에 반드시 구조를 어떻게 이해했는지 표시할 것을 당부하였다. 특히 n 단계 그림을 그릴 때에는 생략 표시인 ‘...’을 이용하여 구조의 일반성을 표현할 것을 요청하였다.

이후 보정을 실시하였는데, 보정은 화면에 고루 분포된 몇 개의 지점을 응시할 때 각 피험자의 동공 상태를 확인함으로써 안구 운동 추적의 정확도를 높이는 단계이다. 사람의 동공은 개인별로 크기와 모양이 상이하므로 안구 운동 추적 실험에서 보정 단계는 반드시 필요하다(Holmqvist et al., 2011). 보정은 안구 운동 측정 소프트웨어 gaze-point analysis가 제공하는 11-point 알고리즘을 통해 실시하였다.

보정 단계 이후 실험 참가자들은 4개의 문제를 차례로 해결하였다. 1개의 문제는 각각 3개의 소문항으로 구성되어 있으며 슬라이드마다 도형 패턴과 소문항이 1개씩 배치되었다¹⁶⁾. 각 슬라이드 사이에는 정중앙에 십자가가 위치한 2초짜리 더미 슬라이드를 배치하여 직전 슬라이드에서의 마지막 응시의 위치가 다음 슬라이드에 영향을 주지 않도록 하였다

16) 본 연구의 과제에서는 학생이 4단계, 7단계, n 단계 문항을 한 화면 안에서 동시에 볼 수 없다는 점이 지필 환경과 다르다. 이러한 제약이 학생들의 일반화 과정에 영향을 미쳤을 가능성이 있다. 실제로 4단계나 7단계 문항에 대한 기억을 떠올려 이용하는 학생이 있었고, 기억의 왜곡으로 실수를 하는 학생도 있었기 때문이다. 이는 안구 운동의 측정과 분석을 위해 한 슬라이드에 한 문항만 배치할 수밖에 없는 실험 설계의 제약으로 인한 본 연구의 한계라 할 수 있다.



[그림 IV-4] 본 실험 측정 장면

(Holmqvist et al., 2011). 따라서 연구 참가자들은 총 12개(4문제×3문항)의 슬라이드를 해결해야 했다.

[그림 IV-4]는 실제 본 실험 측정 장면 중 하나이다. 모니터 하단에 아이트래커가 배치되어 있으며 실험참여자자는 모니터로부터 약 60cm 떨어진 위치에 앉는다. 책상 위 편한 위치에 펜 태블릿을 배치하여 참가자들이 종이에 수학 문제를 풀듯이 펜 태블릿을 이용하여 화면의 모든 곳에 자유롭게 필기를 하면서 문제를 해결할 수 있도록 하였다. 과제 해결 시간에 제한을 두지 않았으며, 참가자 스스로 오른쪽 상단의 다음 버튼을 클릭하여 다음 문제로 넘어가도록 하였다. 실험 자료는 Full-HD(1920px×1080px) 해상도의 23인치 모니터의 전체화면 모드로 제시되었다. 실험이 시작되고 나면 연구자는 반대편으로 이동하여 듀얼 모니터에 나타나는 모니터링 화면을 보면서 측정상태를 실시간으로 점검하였는데, 실험참여자자들이 무의식적으로 모니터에 너무 가까이 가거나 멀리 떨어져 아이트래커가 동공을 인식하지 못하게 됐을 때는 구두로 자세 교정을 요청하였다.

회상자극면담

안구 운동 패턴에 대한 분석만으로는 피험자의 내적 인지 과정을 정확하게 조사할 수 없으므로(Hyönä, 2010; Rothkopt et al., 2007), 사후 면담과 같은 전통적인 자료와의 상호보완적 분석이 필요하다. 회상자극면담(stimulated recall interview)은 피험자에게 비디오 영상을 보여주면서 과거의 생각을 회상하도록 하여 인지 과정을 조사하는 연구방법으로(Lyle,

2003), 주로 교사의 전문성, PCK에 관한 연구에서 사후면담의 한계에 대한 대안적인 연구방법으로 사용되어왔다(e.g. Lannin et al., 2013). 최근 수행된 Schindler & Lilienthal(2019)의 연구는 시선 흐름 영상을 이용한 회상자극면담이 기하 증명에서 학생의 인지 과정을 자세히 분석하는 데 유용하게 사용될 수 있음을 보였다. 이 연구에서 학생은 자신의 문제 해결 장면과 동기화되어 표시되는 안구 운동을 보면서 시간에 흐름에 따른 자신의 사고 과정을 자세히 진술할 수 있었다. 이에 본 연구에서도 회상자극면담을 이용하여 학생들의 일반화 과정을 분석하고자 하였다.

회상자극면담에서 회상의 즉시성은 방법의 신뢰도를 확보하는 데 중요한 요소이다(Lyle, 2003). 따라서 본 연구에서는 측정이 끝난 직후 바로 학생과 연구자가 나란히 앉아 시선 흐름 영상을 함께 보면서 회상자극면담을 실시하였다. 영상에서 원과 선분으로 표현되는 안구 운동을 해석하는 방법에 대해 알려준 뒤 학생에게 시선 흐름을 보면서 그 당시의 사고 과정에 대해 이야기할 것을 요구하였다. 선행연구에서 사용된 방법들을 토대로 중요한 순간은 정지하거나 반복 재생하면서 사고를 자유롭게 말할 수 있도록 하였고 연구자가 더 알고자 하는 내용이 있는 경우 추가 질문을 하였다. 특히 해석이 모호한 장면이 나타났을 때는 해당 부분을 반복적으로 재생하면서 학생에게 “이 눈의 움직임은 뭐와 관련된거야?”, “여기를 왜 본거야?”와 같은 발문으로 사고과정에 대해 적극적으로 질문을 했다.

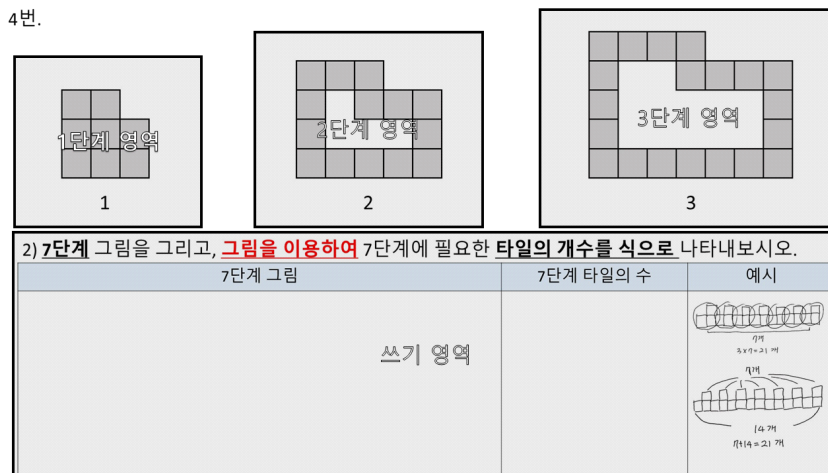
실험 시간은 개인의 패턴 일반화 수행 능력에 따라 차이가 있었기 때문에 과제를 해결하는 데까지는 일반적으로 30분에서 60분 정도의 시간이 소요되었고, 회상자극면담은 40분 정도 진행되었다. 따라서 1인당 최대 1시간 40분까지도 검사 시간이 소요되었다.

1.4.3. 양적 분석

s8은 시행착오적 추측과 확인을 이용하여 각 문제의 원 일반화를 진행하였고, 문자 n 의 의미를 정확히 알지 못하여 모든 문제의 일반식을 제

대로 구하지 못하였다. 따라서 다른 17명과 문제 해결 양상이 매우 상이하였을 뿐 아니라 다른 17명의 학생들의 전체 반응시간은 21.37(4.88)분이었던 것에 반해 s8의 반응시간은 62.9분이었다. 이에 따라 s8의 반응시간이나 시간과 관련된 모든 안구 운동 지표들이 이상치로 나타났다. 따라서 양적 분석에서는 s8을 제외한 17명의 자료를 분석하였다.

양적 분석을 실시하기 위하여 자료를 가공하였다. 자료의 가공은 R 3.6.1 버전(R Core Team, 2019)과 엑셀을 이용하였다. 먼저 150hz로 측정된 원자료를 제조사에서 번들로 제공하는 소프트웨어 Gazepoint Analysis에 내장된 사건 감지 알고리즘을 이용하여 응시와 도약으로 구분하여 학생별 응시 자료를 생성하였다. 응시 자료는 측정시간 동안의 응시의 길이, 응시의 좌표, 도약 속도, 눈 깜박임 여부 등이 포함되어 있다. 이후 시선흐름 영상을 보면서 육안으로 자료의 정확도를 확인하는 과정을 거쳤다(Holmqvist et al., 2011). 일부 안경을 착용한 학생의 경우 응시의 위치가 일관되게 특정 방향으로 평행이동되어 측정되는 경우가 있었다. 이러한 경우 오차를 구하여 응시 자료를 보정하는 작업을 실시하였다¹⁷⁾. Gazepoint Analysis를 이용하여 시선 흐름 영상을 보면서 각 학생이 각



[그림 IV -5] 관심영역(AOI)의 설정

17) 일반적으로 화면에 필기할 때 응시는 펜의 끝부분에 위치한다는 점을 이용하여 오차의 값을 산출하였다.

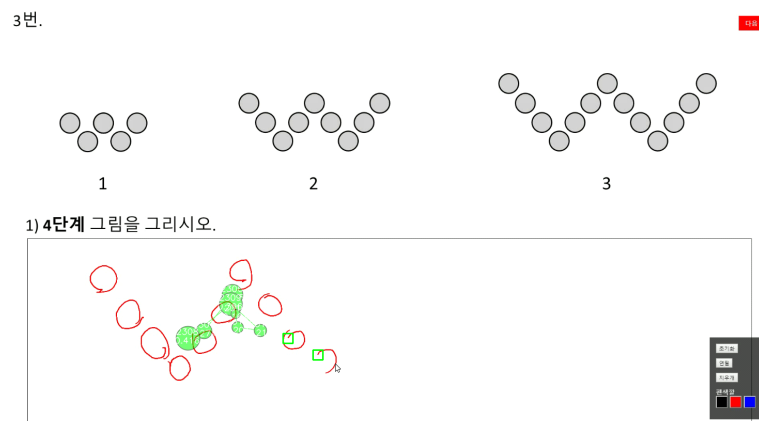
문항을 해결한 시간 구간을 구한 뒤 이를 이용하여 응시 자료의 응시들을 분류하였다. 각 문제가 화면에 나타난 이후의 첫 번째 응시는 직전 문제의 영향을 받으므로 자료에서 제외되었다(Holmqvist et al., 2011). 다음 슬라이드로 넘어가기 위하여 오른쪽 상단 버튼을 클릭하는 행동과 연관된 응시도 자료에서 제외되었다. 분석을 위하여 문항 슬라이드 별로 관심영역(AOI)을 설정하였는데, [그림 IV-5]과 같이 1단계, 2단계, 3단계, 쓰기 영역으로 구분하여 설정하였다. R을 이용하여 각 응시가 속한 AOI를 구하여 응시 자료에 추가하였다.

학생별 응시 자료를 하나의 응시 자료로 병합한 후 R을 이용하여 문항별 반응시간, 문항별 AOI의 응시시간, 응시횟수, 응시비율, AOI 간 전환횟수를 구하였다. 반응시간의 경우 SPSS 25를 이용하여 반복측정 분산분석(Repeated Measures ANOVA)을 실시하여 비교하였다.

1.4.4. 질적 분석

질적 분석에서는 시선 흐름 영상 및 이미지, 히트맵, AOI 전환 그래프, 회상자극면담 영상을 분석의 자료로 활용하였다.

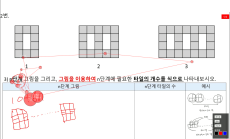
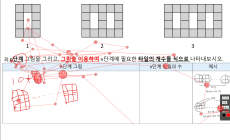
시선 흐름은 응시를 응시 길이에 비례하는 반지름을 갖는 원으로 나타내고 도약 운동을 원 사이의 선으로 나타내는 것으로, 안구 운동 지표만



[그림 IV-6] 시선 흐름 영상의 재생 장면

으로는 확인하기 어려운 시선의 이동 경로나 분포 경향성 등에 대한 정보를 제공한다. 시선 흐름 영상은 펜 태블릿을 이용하여 문제를 해결하는 과정이 담긴 영상 위에 실시간으로 응시와 도약이 동기화되어 나타나기 때문에 [그림 VI-6]과 같이 문제를 해결하면서 학생들이 매 순간 어떤 위치를 응시하였는지 알 수 있다. 시선 흐름 이미지는 일정 기간의 안구 운동을 하나의 이미지로 나타내는 것으로 해당 기간 동안의 안구 운동을 관찰할 수 있게 한다. 히트맵은 응시횟수와 응시시간을 색의 스펙트럼으로 나타내는 이미지이다. 붉을수록 응시횟수가 많고 응시시간이 길다. AOI 그래프는 R을 이용하여 연구자가 생성한 것으로 x 축을 시간 y 축을 AOI로 하는 꺾은선 그래프로 시간에 흐름에 따른 AOI 전환을 확인할 수 있다. 회상자극면담 영상은 시선 흐름 영상을 재생하고 연구자와 학생이 문제 해결 과정과 그때의 안구 운동을 보면서 그 당시의 사고 과정에 대해 나눈 대화를 녹화한 영상으로, 시선 흐름 영상 위에 연구자와 학생의 대화가 녹음되어 있다.

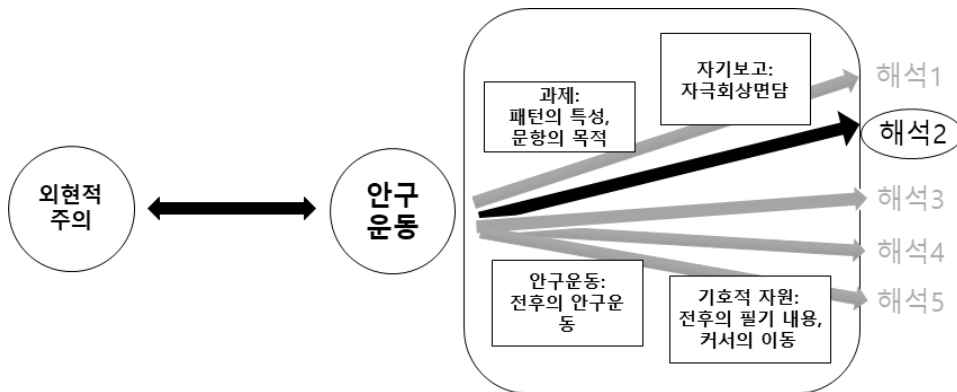
<표 IV-4> 질적 분석을 위한 회상자극면담 자료의 정리 양식

학생	문제	문항	시작 시간	종료 시간	시선 흐름 이미지	안구 운동 패턴과 쓰기 기록	관련 회상자극면담 내용
s1	2	3	10:48.229	10:55.329		→ 본인이 쓴 '+' 집중 응시 → 1, 2, 3 빠르게 도약 → '+' → 'n단계' 글자 → '+' → 'n단계' → '+' 다시 '6n' 이라고 씀	S: 네 그래서 지금 다시 규칙 찾고 T: 다시 규칙 어떻게 찾은거야? 지금? 위예를 어떻게 보고 있는 거지? S: 몇 개가 늘었는지.. S: 몇 개가 늘었는지..(한번 더 말함) 그런데 6개가 늘은 거예요! 그래서 다시 6을 썼는데.. 아무래도 이상하니까 T: 아 6개가 늘어나니깐 또 6n을 썼는데 또 아까 7단계랑 달라? S: 네
s1	2	3	10:55.329	11:09.829		무작위적 움직임	S: 그래서 생각을 하다가 T: 이거는 지금 막 움직하네? S: 네 방향해요.

질적 분석을 위한 기초 자료 수집을 위하여 회상자극면담 영상을 시청하면서 <표 IV-4>와 같은 표의 형식으로 자료를 정리하였다. 이러한 형식의 자료 수집 양식은 Schindler & Lilienthal(2019)와 Epelboim & Suppes (2001)에서 사용한 것을 본 연구의 목적에 맞게 수정한 것이다. 시선 흐름 영상을 보면서 나타나는 안구 운동의 일정한 패턴(예: 1단계와 2단계의 동일 부분을 왕복, 무선적인 움직임, 어떤 특정 부분의 주위를 집중 응시 등)과 필기 시점을 기준으로 구간을 나누어 구간별로 시선 흐름 이미지, 그때 나타난 안구 운동 패턴과 쓰기 행동, 관련된 회상자극면담 내용을 정리하였다.

문제 해결에 관하여 안구 운동 추적을 사용한 선행연구에 준하여 응시 최저 시간을 100ms로 설정하였다. 양적 분석과 마찬가지로 각 문제가 화면에 나타난 이후의 첫 번째 응시는 직전 문제의 영향을 받으므로 분석에서 제외하였다(Holmqvist et al., 2011). 다음 슬라이드로 넘어가기 위하여 오른쪽 상단 버튼을 클릭하는 행동과 연관된 응시도 분석에서 제외하였다.

하나의 안구 운동 패턴이 하나의 인지 처리 과정에 유일하게 대응되지 않는다(Rothkopf et al., 2007; Schindler & Lilienthal, 2019). 회상자극면담은 학생의 내적 처리 과정에 대한 신뢰 높은 정보를 제공하지만, 학생들의 자기보고내용은 해당 안구 운동 패턴과 관련된 전반적인 과정에 대해 주로 말할 뿐 응시 1개 단위의 의미를 설명하지는 못하였다. 또한 아이트래커 측정 직후 회상자극면담을 실시했음에도 불구하고 어떤 안구 운동 패턴에 대해서는 학생들이 당시 무슨 생각을 하고 있었는지 기억하지 못하는 경우도 있었다. 따라서 본 연구에서는 회상자극면담뿐 아니라 과제의 특성, 문제 해결 진행 상황, 필기 내용, 커서의 이동을 고려하여 연구 참여자의 내적 처리 과정을 보다 정확하게 추론하려고 노력하였다. 회상자극면담에서 학생이 구체적으로 보고한 부분은 해당 내용을 우선시하여 분석하였다. 회상자극면담에서 학생이 모르겠다고 응답하거나 특별히 언급하지 않은 부분은 연구자가 안구 운동 패턴과 다른 맥락 정보를 토대로 해석하였다. 앞에서 말한 두 가지 방법으로 해석이 불가능한 안



[그림 IV-7] 안구 운동으로부터 내적 처리 과정을 추론하는 과정

구 운동 패턴은 해석하지 않았다. [그림 IV-7]는 본 연구에서 학습자의 내적 처리 과정을 해석하는 이론적 틀을 도식화한 것이다.

먼저 참여자들의 소문항별 정답 여부를 판별하고 일반화 접근 방법을 분류하였다. 그 후 연구 목적에 맞게 학생들의 행동을 분석하고 분류하였다. 본 연구는 패턴 일반화를 순차적이고 점진적인 과정이 아니라 동적이고 복잡한 비순차적 과정이라는 관점(Ellis, 2007; Rivera, 2013)에서 학생들이 일반화를 위해 시도하는 다양한 행동을 분석함으로써 일반화 과정을 살펴보고자 하였다. 본 연구는 도형 패턴의 일반화에서 학생들의 행동(action)을 ‘도형 패턴을 일반화하기 위하여 학생이 수행하는 수학적 조작’으로 정의한다. 행위자 중심 관점(Lobato, 2003)을 확장하여 적용했던 Ellis(2007)의 연구를 참고하여 일반화에 대한 규범적 개념을 배제하고 학생의 수학적 관점에 초점을 맞추어 학생이 1) 사례의 어떤 특성을 공통성으로 인식하는지 2) 어떻게 공통성을 생성하는지 3) 공통성을 어떻게 확장하는지 4) 공통성을 어떻게 상징화하는지와 관련된 행동을 집중적으로 조사하였다. 이렇게 분석한 행동을 정신적 추론의 특성에 따라 다시 Ellis(2007)의 일반화 행동 분류법을 이용하여 범주화하였다. 또한 본 연구는 패턴 일반화가 가추-귀납의 순환 과정이라는 Rivera(2008, 2010a)의 관점에서 이러한 행동들이 가추 단계와 귀납 단계에서 어떤 역할을 하는지에 초점을 두고 분석하였다. 마지막으로 일반화에 실패한 사례를 분석하고 오류의 유형과 경로 및 원인을 분석하였다.

2. 패턴 일반화 수행 내용

2.1. 일반화 수행 정도

회상자극영상 분석 내용을 토대로 학생들의 일반화 과정을 살펴본 결과 4명(s1, s7, s8, s9)을 제외한 14명의 학생들이 연구의 의도대로 도형적 접근을 중점적으로 사용하였다. <표 IV-5>는 18명 학생의 문항별 정오표와 개인별, 문항별 정답률을 나타낸 것이다. 전체문항의 정답률은 74.54% 였고 각 문제의 (3)번 즉, 일반식을 성공적으로 구한 비율은 문제 1, 문제2, 문제3, 문제4가 각각 72.22%, 72.22%, 77.78%, 72.22%로 비슷했다. 모든 문제의 n 단계 일반식을 바르게 구한 학생은 전체 18명 중 9명이었고 세 문제의 일반식을 구한 학생은 4명, 두 문제의 일반식을 구한 학생은 2명, 한 문제의 일반식을 구한 학생은 1명, 일반식을 하나도 구하지 못한 학생은 2명이었다. 모든 문제의 일반식을 구한 9명 중 4명은

<표 IV-5> 개인별, 문항별 정확도

학생	1(1)	1(2)	1(3)	2(1)	2(2)	2(3)	3(1)	3(2)	3(3)	4(1)	4(2)	4(3)	계	전체문항 정답률(%)	n 단계 정답률(%)
s1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	100.00	100.00
s2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	10	83.33	100.00
s3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	100.00	100.00
s4	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	6	50.00	50.00
s5	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	10	83.33	75.00
s6	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	7	58.33	50.00
s7	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	11	91.67	75.00
s8	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	6	50.00	0.00
s9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	16.67	0.00
s10	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	5	41.67	25.00
s11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	100.00	100.00
s12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	100.00	100.00
s13	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	10	83.33	100.00
s14	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	7	58.33	75.00
s15	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	8	66.67	75.00
s16	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	8	66.67	100.00
s17	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	10	83.33	100.00
s18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	100.00	100.00
계	15	13	13	13	12	13	16	15	14	13	12	13	160	74.07	72.22
문항 정답률(%)	83.33	72.22	72.22	72.22	66.67	72.22	88.89	83.33	77.78	72.22	66.67	72.22	74.07		

일부 근 일반화 문제나 원 일반화 문제에서 오류를 범했다. 식을 정리하는 과정에서 사소한 계산 실수를 하여 잘못된 일반식을 구한 경우는 정답으로 처리하였다.

2.2. 일반화 전략

각 학생이 사용하는 전략은 안구 운동 추적을 활용하여 패턴 일반화에 서의 행동이나 어려움을 분석하는 데 있어서 맥락 정보를 제공한다. 따라서 학생들의 전략에 대한 분석을 실시하였다. 회상자극면담 영상의 분석을 토대로 일반 학생들의 일반화 전략을 분류하였다. 4명(s1, s7, s8, s9)을 제외한 14명의 학생들이 연구의 의도대로 도형적 접근을 중점적으로 사용하였다. 근 일반화 문제의 경우 4단계로 패턴을 확장하는 과정에서 사용된 방법에 따라 재귀, 함수, 혼합으로 분류하였다. 원 일반화(7단계)의 경우 7단계 그림을 그리고 타일의 수를 구하는 방법에 따라 재귀, 함수, 차이, 연결, 추측과 확인으로 분류하였다. 기호적 일반화(n 단계)의 경우도 n 단계 타일의 수를 구하는 방법을 기준으로 함수, 차이, 연결, 추측과 확인으로 분류하였다. 정답 여부는 고려하지 않고 학생이 시도한 전략을 기준으로 분류하였으며 판단이 불가능한 경우는 기타로 분류하였다. 풀이 내용, 안구 운동, 면담 내용을 토대로 일반화 전략을 분류하였기 때문에 단순히 활동지의 풀이만을 토대로 분류한 것보다 정확성을 높일 수 있었다. 다음은 각 전략 분류 기준에 대한 설명이다.

근 일반화 문제(4단계)

- ① 재귀: 재귀적인 방법으로 3단계로부터 4단계를 그린 경우
- ② 함수: “단계의 수보다 1개 더 많아서 이렇게 그렸어요”와 같이 단계의 수와 패턴 사이의 함수적 관계를 이용하여 그린 경우
- ③ 혼합: 재귀적 방법과 함수적 방법을 혼합하여 그린 경우

원 일반화 문제(7단계)

- ① 재귀: 재귀적인 방법으로 7단계를 그리고 타일의 수를 직접 센 경

우

- ② 함수: 7단계 그림을 그리고 함수적 관계를 이용하여 식을 세운 경우
- ③ 차이: 연속된 항 사이의 일정한 차 d 에 7을 곱하여 타일의 수를 구한 뒤 숫자에 맞추어 그림을 그린 경우
- ④ 연결: 7단계 그림을 그리고 $a_1 + 6d$ 를 이용하여 타일의 수를 수치적으로 구한 경우(d :일정한 차)
- ⑤ 추측과 확인: 수치적인 재귀 관계를 이용하여 7단계 타일의 수를 구한 뒤, 타일의 수가 맞을 때까지 그림을 시행착오의 방법으로 반복적으로 수정하여 완성

기호적 일반화 문제(n 단계)

- ① 함수: n 단계 그림의 구조를 ... 을 이용하여 함수적으로 표현하고 그림을 이용하여 일반식을 구함
- ② 차이: n 단계 그림을 재귀적으로 표현하고 연속된 항 사이의 일정한 차 d 에 단계의 수를 곱하여 일반식을 구함
- ③ 연결: n 단계 그림을 재귀적으로 표현하고 $a_1 + (n-1)d$ 를 이용하여 일반식을 수치적으로 구함
- ④ 추측과 확인: n 단계 그림을 재귀적으로 표현하고 식의 수정과 대입을 반복하여 일반식을 구함

<표 IV-6>는 전체 연구 참여자의 일반화 전략을 정리한 것이다. 문제1, 2, 3의 경우 근 일반화 문제에서 재귀적인 접근이 많이 나타났다. 이는 인접한 두 단계 사이의 재귀적인 변화를 인식하면 이를 이용하여 3단계 패턴을 보면서 4단계를 바로 그릴 수 있기 때문이다. 그러나 4번의 (1)의 경우 함수적 접근과 재귀적 접근이 혼합되는 경우가 많았는데, 패턴의 각 변을 일부는 단계의 수와의 함수적 관계를 이용하여 그리고, 나머지는 재귀적으로 3단계의 변에 타일을 하나 더 늘리는 식으로 그렸기 때문이다. 따라서 근 일반화 단계에서 재귀적 접근 경향 역시 도형 패턴의

<표 IV -6> 문항별 일반화 전략

학생	1(1)	1(2)	1(3)	2(1)	2(2)	2(3)	3(1)	3(2)	3(3)	4(1)	4(2)	4(3)	전체문항 정답률(%)
s1	재귀	함수*	함수	재귀	재귀	함수	재귀	연결*	연결	함수	함수*	함수	100.00
s2	함수	함수	함수	재귀	함수	함수	함수	함수	함수	혼합	함수	함수	83.33
s3	재귀	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	재귀	함수	함수	100.00
s4	함수	함수	연결	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	50.00
s5	함수	함수	함수	혼합	혼합	함수	함수	함수	함수	혼합	혼합	함수	83.33
s6	함수	함수	기타	함수	함수	기타	함수	함수	함수	함수	함수	기타	58.33
s7	재귀	재귀	추측확인	함수	함수	연결	재귀	함수	함수	혼합	함수	함수	91.67
s8	재귀	재귀	기타	재귀	재귀	기타	재귀	함수	기타	재귀	추측확인	기타	50.00
s9	재귀	차이	차이	함수	함수	차이	재귀	연결	차이	혼합	함수	함수	16.67
s10	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	41.67
s11	재귀	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	100.00
s12	상항	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	100.00
s13	함수	함수	함수	혼합	함수	함수	재귀	함수	함수	혼합	함수	함수	83.33
s14	함수	함수	함수	혼합	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	58.33
s15	재귀	연결*	연결	재귀	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	75.00
s16	함수	함수	함수	재귀	함수	함수	함수	함수	함수	혼합	함수	함수	66.67
s17	재귀	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	83.33
s18	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수	재귀	함수	함수	100.00

*7단계에서 n 에 관한 일반식을 구한 경우, 굵게강조: 함수적으로 접근하지 않은 경우

물리적 구조의 영향을 받는다고 해석할 수 있다. 재귀적 접근의 사용 비율이 높은 s8, s9는 단 한 문제의 일반식도 구하지 못하였다. s1이나 s7도 근 일반화나 원 일반화 단계에서 재귀적 접근을 많이 사용하였지만, n 단계 일반화에서는 함수적 접근으로 전환하였기 때문에 정답률이 높았다.

대부분의 학생들은 재귀적 전략의 비효율성을 인식하고 있었으며 7단계를 일반화할 때부터는 함수적 규칙을 찾으려고 노력하였다. 다음은 연구자가 s14에게 문제3에서 각 단계의 타일의 수를 센 이유에 대해 묻는 회상자극면담 내용의 일부이다.

t: 개수는 여기서 왜 센거야?

s14: 어, 규칙 있을까 하고.. 4개씩 늘어나긴 하는데, 계속 많이 가면은 막힐 거 알아가지고

t: 아 뒷 문제에서 앞에거 알아야 되니까?

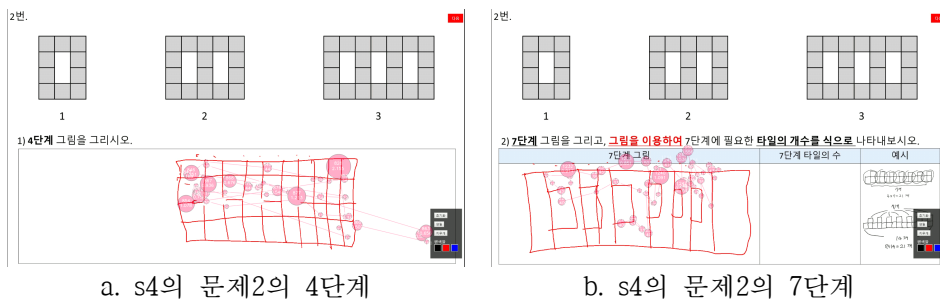
s14: 그 막 n 단계 할 때에는 앞에 몇 개가 있는지 정확하게 모르니깐

t: 그게 무슨 말이지?

s14: 아 그니깐 여기서는 3단계 할 때 앞에 것이 9개 였다는 걸 알고 4를 더

하는거자나요? 그래서 n 번째 할 때는 $n-1$ 번째를 생각하고 4를 더해
야하니까 복잡해서 그렇게 안했어요.

s14는 재귀적 전략의 한계를 정확히 인식하고 있음을 볼 수 있다. 효율성에 대한 추구는 학생들의 접근법이나 전략을 바꾸게 하는 강력한 동기였다. 예를 들어, s4의 경우 문제2의 4단계를 [그림 IV-8.a]와 같이 격자를 완성한 후 지우는 방식으로 확장하였다. 그러나 s4는 회상자극면담에서 4단계에서 사용한 방법이 비효율적인 것처럼 느껴져서 7단계에서는 새로운 방법을 찾아보았다고 보고하였는데, 새롭게 다근 구조를 발견하여 다근을 이어 붙이는 방식으로 패턴을 그리는 방법을 변경하였다[그림 IV-8.b].



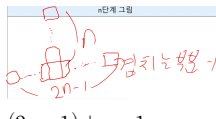
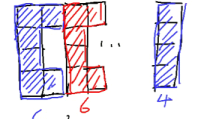
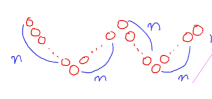





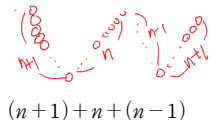


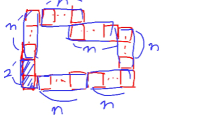
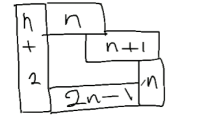
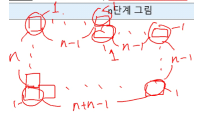
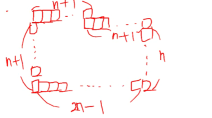

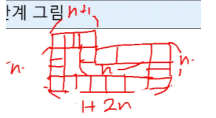
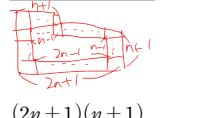
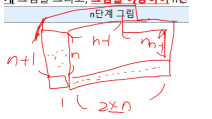



[그림 IV-8] s4의 그리기 전략의 변화

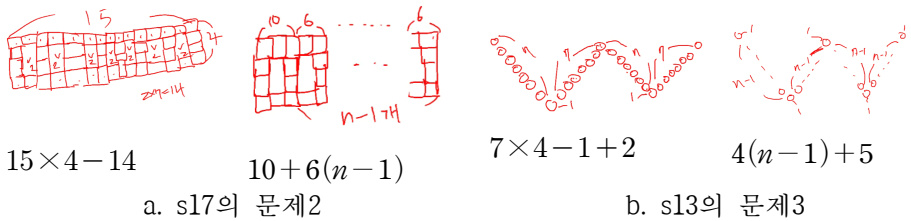
2.3. 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결

<표 IV-7>는 도형적 접근을 통해 일반화한 학생들이 패턴의 구조를 해석한 방법을 유형에 따라 문제별로 분류한 것이다. 전체 49 사례 중 44 사례(89.8%)가 겹치는 부분이 없는 구성적 일반화에 해당하였다. 문제1의 경우 대부분 2종류의 구성적 일반화 방법을 사용하였으며 1명만 해체적 일반화를 하였다. 문제2에서는 전원이 구성적 일반화를 하였으며 ‘ π ’ 형태의 단위를 인식한 학생들은 $4+6n$ 와 같은 형태로 일반화한 반면, 위, 아래, 중간을 분해한 경우도 있었다. 문제3에서도 대부분 구성적 일반화를 하였고, 1명의 학생만이 구성적이면서도 해체적인 일반화를 하였

<표 IV-7> 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결

1번(n=11)				2번(n=13)
				
$3(n-1)+1$ 구성적(5명)	$n+2(n-1)$ 구성적(5명)	$(2n-1)+n-1$ 해체적(1명)	$6n+4$ 또는 $4+6n$ 구성적(6명)	
3번(n=13)				
				
$4n+1$ 구성적(6명)	$2n+4(n+1)$ 구성적(1명)	$2(2n+1)+2(n+1)$ 구성적(2명)	$10+6(n-1)$ 구성적(4명)	
				
$(n+1)+3n$ 구성적(3명)	$4(n-1)+5$ 구성적(2명)	$(n+1)+n+(n-1)+ (n+1)$ 구성적(1명)	$(4n-1)+2$ 구성/해체 혼합(1명)	
4번(n=12)				
				
$n+n+(n+1)+ (2n-1)+(n+2)$ 구성적(2명)	$n+n+n+n+n+2$ 구성적(2명)	$(n+2)+n+(n+1)+n+(2n-1)$ 구성적(1명)	$n+3(n-1)+(n+n-1)+n+6$ 구성적(1명)	
				
$(n+1)+(n+1)+(n+1)+n+(2n-1)$ 구성적(1명)	$n+n+2+n+n+2n$ 구성적(1명)	$(n+1)+3n+(1+2n)$ 구성적(1명)	$(2n+1)(n+1)- (2n-1)(n-1)+ (n+1)-(n-1)$ 보조 기반(1명)	
				
$(2n+1)(n+2)-2\{(n-1)n\}-n$ 보조 기반(1명)	$2(2n+1)+2n$ 변환 기반(1명)			

다. 형 우수성이 낮은 문제 4번의 경우 패턴을 구성적으로 분해하는 방법이 7가지로 나타났다. 사각형을 이루는 6개의 변을 분할 할 때 코너에 있는 타일을 어떤 변에 포함시키는 지에 따라 다양한 일반화가 나타났다. 또한 다른 문제에서 나타나지 않았던 보조 기반 일반화가 2명, 변환 기반의 일반화를 한 학생이 1명 있었다. 보조 기반의 일반화의 경우 더 큰 직사각형의 넓이에서 흰 부분을 빼는 방법을 사용했다. 변환 기반의 일반화의 경우 위쪽 변의 오른쪽 부분을 평행이동하면 직사각형으로 변환시킨 다음 타일의 수를 세었다.



[그림 IV-9] 패턴과 대수적 표현 사이의 연결의 변화

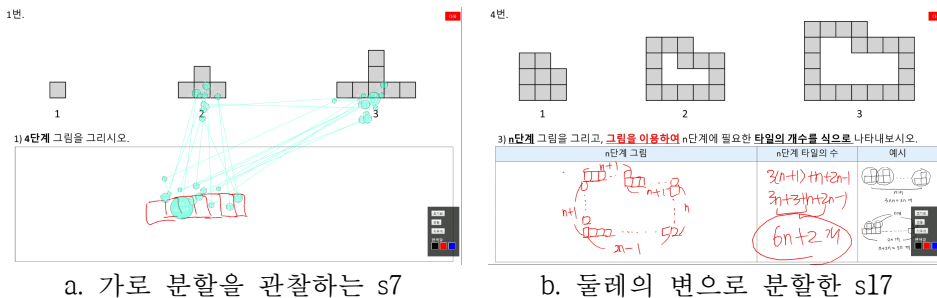
대부분의 경우 7단계에서의 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결 방법이 n 단계에서도 동일하게 확장되어 사용되었다. 그러나 도형적 접근을 한 전체 사례 중 8 사례에서는 그 방법이 변화하기도 하였다. 예를 들어 [그림 IV-9.a]에서 s17은 문제2의 7단계에서 전체 타일의 수를 구한 다음 7개의 빈 곳을 제외시키는 방식으로 타일의 수를 구하였지만, n 단계에서는 더 큰 구조를 이용하여 일반식을 구하였다. [그림 IV-9.b]에서는 s13이 문제의 7단계에서는 겹치는 부분을 한번 빼는 방식으로 타일의 수를 구하였지만 n 단계에서는 겹치는 부분이 없도록 분해한 후 일반식을 구하였다. 회상자극면담에서 s17은 더 효율적인 방법인 것 같아서 방법을 바꾸었다고 하였고, s13의 경우 겹치는 것이 걸려서 겹치지 않게 바꾸었다고 대답하였다. 효율성은 학생들이 패턴의 구조와 대수적 표현을 연결하는 방법을 결정하는 데 영향을 주는 요소로 볼 수 있다. 또한 학생들의 겹치는 부분이 존재하는 것을 꺼리는 경향이 구성적 일반화 방법의 비율이 높은 현상에 영향을 주는 것으로 볼 수 있다.

3. 일반화를 위한 행동

3.1. 패턴의 공간적 분할

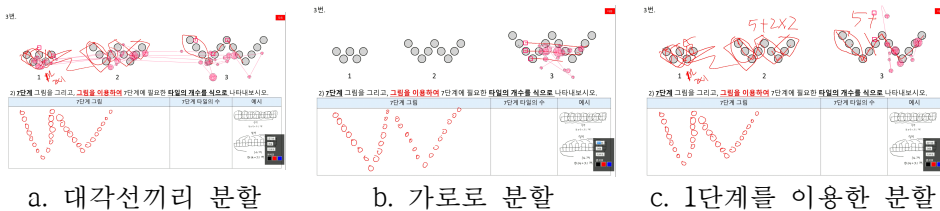
도형 패턴의 1, 2, 3단계를 각각 P_1, P_2, P_3 라 할 때, P_1, P_2, P_3 를 어떤 기준을 적용하여 $P_1 = P_{11} \cup P_{12} \cup \dots \cup P_{1n}$, $P_2 = P_{21} \cup P_{22} \cup \dots \cup P_{2n}$, $P_3 = P_{31} \cup P_{32} \cup \dots \cup P_{3n}$ 로 분할 할 수 있다. 이때 각 P_{k1}, P_{k2}, P_{k3} ($k=1,2,3$)는 일종의 부분 패턴으로 볼 수 있다. 만약 이 부분 패턴들의 재귀적 관계나 함수적 관계를 찾는다면 그것을 토대로 원래의 패턴인 P_1, P_2, P_3 에 관한 규칙을 만들 수 있다.

분석 결과 학생들의 모든 일반화 과정이 패턴의 공간적 분할을 포함하였다. 예를 들어, [그림 IV-10.a]에서 s7의 안구 운동과 그 순간의 필기 내용을 보면 패턴을 가로와 세로로 분할하여 가로 부분을 먼저 확장한 후 세로 부분을 다시 관찰하면서 완성한다는 것을 알 수 있다. [그림 IV-10.b]에서 s17의 경우는 패턴을 하나의 닫힌 도형으로 보았을 때, 5개의 변으로 분할하여 일반화를 하였음을 확인할 수 있다. 문제1, 문제3, 문제4에서는 이와 같이 변으로 분할한 뒤 각 분할의 규칙을 찾는 경우가 많았다. 즉, 학생들은 일정한 기준에 따라 패턴을 분할하고 각 단계의 동일한 분할끼리 비교하며 재귀적 관계나 함수적 관계를 발견하고자 하였다.



[그림 IV-10] 패턴의 공간적 분할 사례

문제1에서 [그림 IV-16]와 같은 약 10초 내외의 초기 관찰 이후에 [그림 IV-10.a]와 같은 과정이 이루어지는 것을 보았을 때, 문제1과 같이 $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되고 닳음 도형의 형태로 성장하는 패턴은 상대적으로 분할이 쉽고 빠르게 이루어지는 것으로 판단된다. 그러나 문제3이나 문제4와 같이 $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되지 않고 복잡한 방식으로 성장하는 패턴에서는 분할을 위한 구체적인 조작들이 나타났다. 예를 들어, s14는 W패턴의 7단계를 재귀적으로 그린 후, 함수적 관계를 찾기 위하여 다양한 기준으로 패턴을 분할하였는데 [그림 IV-11.a]와 같이 대각선으로 같은 방향끼리 묶거나 [그림 IV-11.b]와 같이 가로로 분할하였다. 또 [그림 IV-11.c]와 같이 1단계의 개수만큼 묶은 뒤 나머지 타일들을 단계의 수로 분할하였는데, 2단계에서 $5+2 \times 2$ 구조였지만, 3단계에서 $5+2 \times 3$ 가 성립되지 않아 이러한 분할 방식은 폐기되었다. 이는 패턴의 분할 방법의 유용성이 단계 중심의 산술적 관계의 검색¹⁸⁾을 통해 평가되는 장면으로 해석할 수 있다.



[그림 IV-11] s14가 시도한 3가지 서로 다른 분할 방법

한편, 일부 학생들은 패턴을 단계의 수를 단위로 분할하면서 패턴의 구조를 일반화하고자 하였다. s12의 경우 모든 문제에서 주어진 패턴을 단계의 수를 단위로 공간적으로 분할하는 행동을 하였다. 예를 들어, s12는 W패턴에서 초기 관찰 이후에 [그림 IV-12.a]에서 볼 수 있듯이 바로 3단계를 3개씩 동그라미 치며 분할하였고 바로 4단계를 4-4-4-1의 동일한 구조로 그렸다. 다음은 이 과정에 대한 s12와의 회상자극 면담 내용이다.

18) 단계 중심의 산술적 관계 검색은 3.3에서 자세히 다룬다.

t: 이거는 처음에 어디를 봤어?

s12: 어떤 모양인지 보다가

t: 이거 왜 이렇게 3개씩 (동그라미) 쳐봤어?

s12: 3단계이니까 그냥 3개씩 일단 3개씩 해보고 2단계는 2개씩 해보고 그러
거든요

t: 아, 일종의 전략으로?

s12: 네

t: 2단계는 왜 안 해봤어?

s12: 2단계는 보면 그냥 나오니까

t: 아 그럼 2단계는 안해봤어?

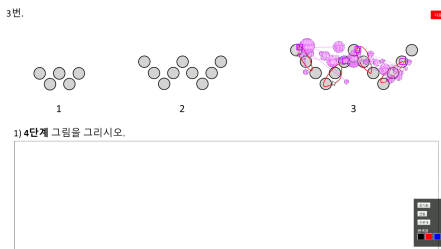
s12: 안했을 걸요.

t: 아 3단계만 해보고 그냥 바로 넘어 간거야?

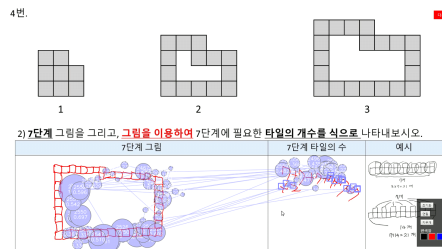
s12: 네

t: 그게 애네들도(1, 2단계) 되리라는 믿음이 어디서 오는 거야?

s12: 그냥 한번 쓱 보고 지나갔어요.



a. s12의 문제3의 분할



b. s5의 문제4의 분할

[그림 IV-12] 단계의 수를 이용한 패턴의 분할 사례

대화에서 볼 수 있듯이 s12는 단계의 수로 패턴을 분할하는 것을 하나의 인지 전략처럼 사용하고 있었다. 이러한 전략에 대한 믿음은 상당히 강력하여 3단계 단일 사례에 대한 결과만을 이용하여 바로 4단계를 확장하였다. [그림 IV-12.b]의 s5의 경우 우선 재귀적인 관계를 이용하여 7단계 패턴을 확장하였다. 타일의 수에 대한 식을 세울 때, s5의 안구 운동은 시계방향으로 둘레를 돌면서 7개씩 나누어서 세고 식을

7+7+7+7+7+2 로 쓴다. 펜으로 그림에 직접 분할을 표시하지는 않았지만 안구 운동은 s5가 둘레를 세면서 7개 단위로 분할했음을 보여준다.

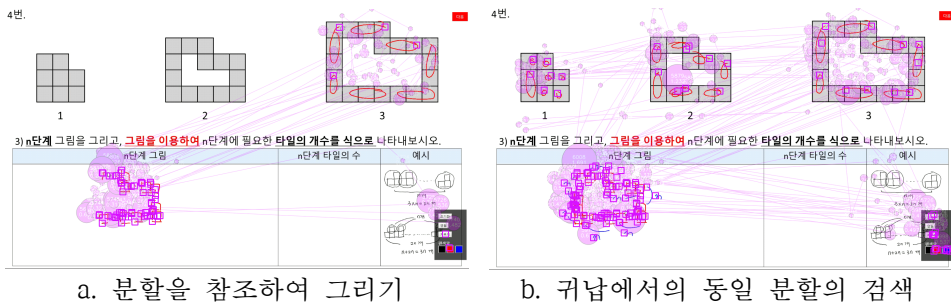
이러한 방식의 분할을 통해 나타난 추측은 대부분 다른 단계에서도 동일한 분할이 가능한지 확인하는 귀납의 과정을 통해 검증되었다. s12는 7단계부터는 문제4에도 동일한 전략을 사용하였다. 연구자가 1단계와 2단계에 동일한 방법으로 분할을 검색하는 행동의 목적과 의도에 대해 질문했을 때 s12는 다음과 같이 대답하였다.

s12: 다시 규칙이 맞는지 확인하고

s12: 이게 3이라서 3에서 1빼서 2가 남는 것인지 그것도 확인해요.

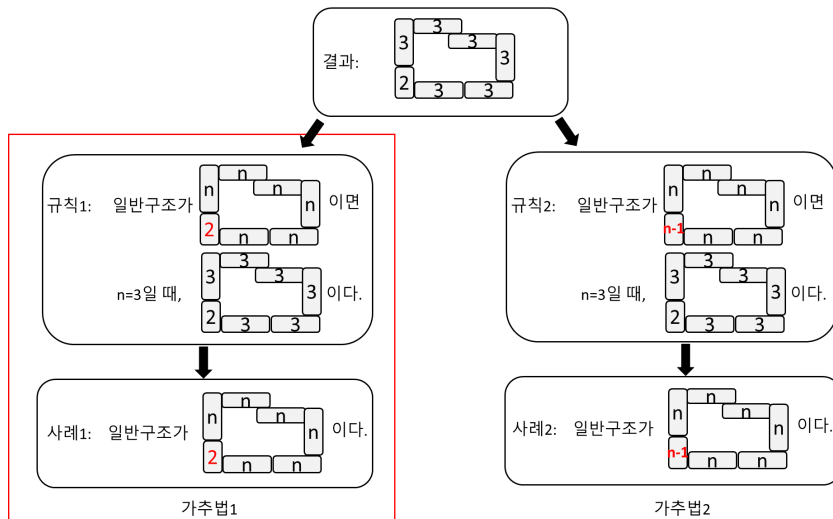
t: 아 그냥 2가 남는 것인지, 3-1 해서 2가 남는 것인지?

s12: 네



[그림 IV-13] s12의 단계의 수에 의한 분할을 이용한 가추와 귀납

s12는 [그림 IV-13.a]와 같이 7단계에서 사용하였던 분할을 다시 3단계에 표시한 뒤 그것을 참조하여 n 단계 그림을 그렸다. 이후 [그림 IV-13.b]와 같이 동일한 분할을 1, 2단계에 모두 적용하였는데, 이러한 검색 행동의 목적은 회상자극면담에서 알 수 있듯이 3단계의 분할로부터 얻은 일반적인 구조를 검증하는 귀납임을 알 수 있다. 특히 s12는 3단계 사례로부터 규칙을 하나로 결정하지 못하고 3단계에서 남는 2가 $n-1$ 인 것인지 상수 2인 것인지와 관련하여 2가지의 가설을 생각하고 있음을 알 수 있다. 이후 1, 2단계에서의 귀납적 검증을 통해 마지막 분할이 상수 2인 가추를 채택하게 된다. 이러한 가추-귀납적 추론 과정은 [그림



[그림 IV-14] 문제4의 기호적 일반화 단계에서 s12의 두 가지 가추

IV-14]와 같이 삼단논법의 형식으로 나타낼 수 있다.

이러한 분할은 $T_n = n$ 이라는 함수 관계가 내포되어 있다. 단순히 패턴에서 지각된 기하적 특성(방향성, 변, 꼭짓점 등)을 기준으로 분할하는 경우는 분할한 뒤 나타나는 부분 패턴의 규칙을 찾아야 하지만, 단계의 수를 이용한 패턴의 분할은 즉각적으로 함수적 관계에 대한 가설을 출현하게 한다. 즉, 패턴을 분할하고 단계와 분할 사이의 함수적 관계를 찾는 과정이 동시에 이루어지는 것으로 볼 수 있다. 그러나 이러한 분할이 모든 선형 패턴에서 유용하게 작용하는 것은 아니다. 예를 들어, 문제2의 창문 패턴과 같은 경우 단계의 수 만큼씩 묶는 행동이 대수적으로 유용한 구조를 발견하는 데 도움이 되지 않는다. 문제2는 A, AB, ABB, ... 꼴의 성장패턴이므로 오히려 반복되는 부분인 B를 이용하여 분할해야 대수적으로 유용한 구조가 출현한다. 실제로 문제2에서는 단계의 수를 이용한 분할이 나타나지 않았는데, 학생들이 항상 같은 전략을 사용하는 것이 아니라 패턴의 구조를 보고 행동을 선택하는 것으로 해석할 수 있다.

각 학생이 패턴을 공간적으로 분할하는 방식은 최종적인 일반화 형태에 영향을 주었다. 그러나 그것이 항상 일치하지는 않았다. 예를 들어,

s17의 초기 분할 방법은 가운데를 포함하여 세 방향으로 7개, 7개, 7개였다.

s17: 이거는 7단계는 근데 어떻게 그랬냐면

s17: 이게 이렇게 해서 2개자나요. 이렇게 해서 3개고.. 그래서 이렇게 해서 7개 요렇게 해서 7개..

t: 이렇게 한건가? 7 7 7

s17: 예

t: 그럼 수 셀 때는 다르게 한거야?

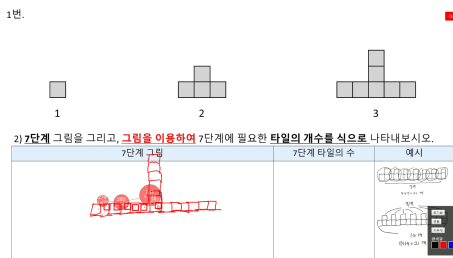
s17: 겹치는 걸 뺐어요. 6개 6 개 6개 한다음 가운데 1개

t: 그럼 맨 처음에는 7 7 7 이렇게 한거 아니야?

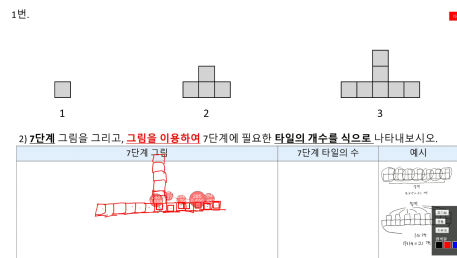
s17: 숫자 셀 때요?

t: 아니 그림 그릴 때

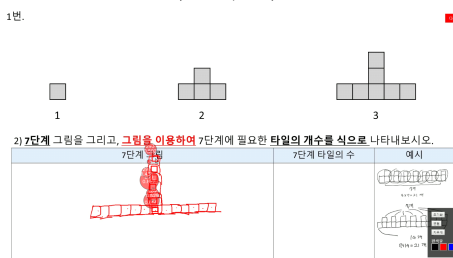
s17: 예, 그때는 7 7 7



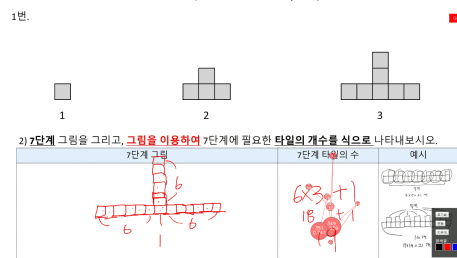
a. 왼쪽에서 중앙포함 7개를 직접 세면서 확인



b. 오른쪽에서 중앙포함 7개를 왼쪽으로 세기



c. 중앙부터 위쪽으로 7개의 타일 확인



d. $6+6+6+1$ 로 겹치지 않게 식을 쓰기

[그림 IV-15] s17이 패턴을 확장할 때의 분할과 식을 세울 때의 분할

실제로 s17은 [그림 VI-15.a~c]에서 볼 수 있듯이 자신의 7단계 그림을 점검할 때도 가운데를 포함하여 차례로 왼쪽, 오른쪽, 위로 점검하였다. 그러나 [그림 VI-15.d]에서는 패턴을 6+6+6+1로 분해하여 식을 세웠음을 알 수 있다.

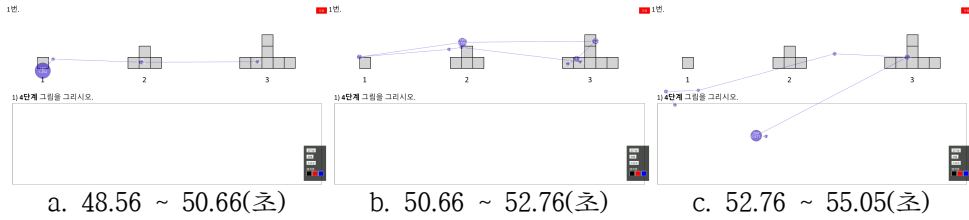
즉, s17이 패턴의 규칙성을 찾을 때의 분할 방법은 겹치는 부분이 존재하는 해체적(deconstructive)이었지만, 타일의 수를 셀 때는 겹치는 것을 방지하기 위하여 구성적(constructive)로 바꾸었다. 즉, 일반화의 과정에서 공간적인 분할은 계산의 효율성 등을 이유로 최종적으로 패턴의 구조를 식으로 나타내는 과정에서 바뀌는 경우가 많았는데, 많은 학생들이 s17과 같이 겹치는 부분이 존재하는 것을 기피하는 경향이 있었다.

요약하면, 학생들은 일정한 기준으로 패턴을 분할하였는데, 공통의 구조가 나타나지 않으면 분할 방법을 바꾸었다. 패턴의 분할을 바탕으로 추가적인 행동을 통해 대응되는 부분들에 대한 재귀적 규칙을 찾거나 함수적 규칙을 가추하고 귀납하였다. 일부 학생들은 단계의 수를 이용하여 패턴을 분할하는 전략을 사용하기도 하였지만, 지각적 특성을 기준으로 패턴을 공통의 구조가 나타나도록 분할한 뒤 각 분할의 규칙을 찾을 때 단계의 수 n 을 고려하는 경우가 더 많았다.

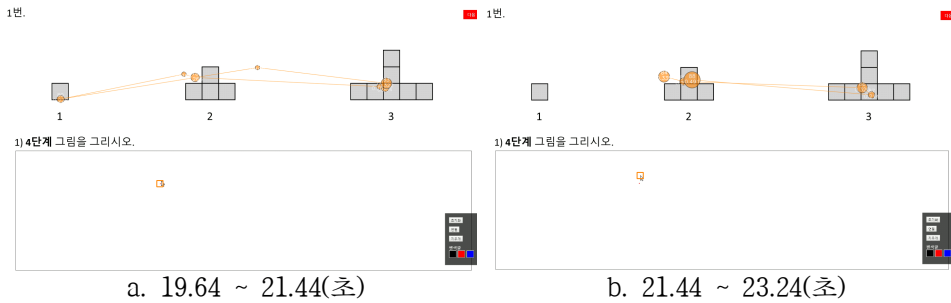
3.2. 단계 사이의 변화 검색

각 문제의 근 일반화 문항에서 최초로 패턴이 화면에 제시되었을 때 거의 모든 학생들에게 패턴의 1, 2, 3단계를 비교하는 안구 운동 패턴이 나타났다. 학생들은 이러한 과정을 대부분 “규칙을 찾으려고 봤어요”라고 표현하는 정도에 그쳤지만 몇몇 메타 인지가 뛰어난 학생들의 면담 내용과 시선 흐름은 이러한 초기 관찰의 목적이 패턴의 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 관찰하고 성장방식을 이해하는 것과 관련됨을 알려 주었다.

예를 들어, [그림 IV-16]의 s1의 안구 운동을 보면 차례로 중앙에 고정적으로 존재하는 타일을 관찰하고 이어서 다시 1단계로 돌아와 각 패턴에서 동일하게 윗부분을 다시 차례로 응시한다. 즉, 각 패턴에서 동일한



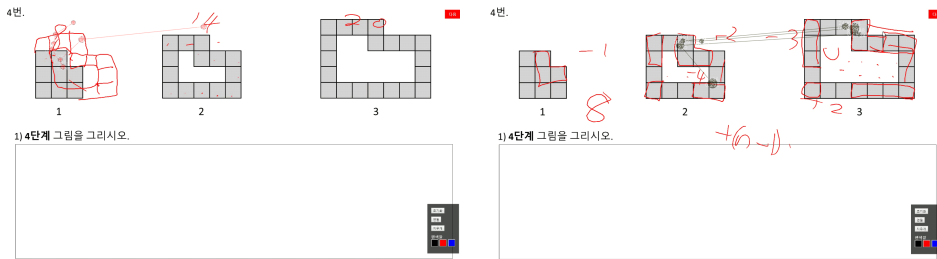
[그림 IV-16] 초기 관찰 과정에서 s1의 안구 운동



[그림 IV-17] 초기 관찰 과정에서 s18의 안구 운동

요소를 차례로 응시하는 패턴이 나타났다. s1은 이때 세 방향으로 1개씩 늘어난다는 것을 파악했다고 보고했다. [그림 IV-17]의 s18의 경우도 1, 2, 3단계를 차례로 빠르게 본 후에는 2단계와 3단계의 동일한 중앙 부분을 왕복하며 응시하는 패턴이 나타난다. s19는 이때 밑변이 1, 3, 5로 2씩 늘어나는 것을 파악했다고 보고하였다.

문제1과 같이 형 우수성이 높고 $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되는 패턴은 각 단계의 동일 부분을 비교하는 10초 정도의 관찰만으로도 대부분의 학생들의 패턴이 세 방향으로 1씩 증가한다는 것을 파악하였다. 그러나 문제3, 문제4와 같이 형 우수성이 낮고 $n-1$ 단계가 n 단계에 포함되지 않는 패턴의 경우 패턴 사이의 불변과 변화를 파악하기 위한 조작적인 행동이 나타났다. 예를 들어, [그림 IV-18.a]에서 s2는 1단계 위에 2단계를 겹쳐서 그렸다. s2에게 겹쳐 그린 이유를 묻자 “이해가 안갔어요. 솔직히 지금 이 부분(1단계의 뭉쳐있는 곳)을 봤을 때..” 라고 대답하였다. s2는 가운데 흰 부분이 없는 1단계가 어떻게 흰 부분이 있는 2단계로 성장하는지 찾기 위하여 겹쳐서 그린 후 비교하였다. [그림 IV-18.b]의 s16의



a. 겹쳐 그려 비교하기(s2)

b. 분할 하여 넣기(s16)

[그림 IV-18] 단계 사이의 변화를 검색하는 구체적 행동

경우도 1단계를 쪼개어 2단계에 포개어 그려 넣고 2단계를 쪼개서 3단계에 그려 넣으면서 공간적, 수량적 변화를 파악하고자 하였다.

단계 사이의 변화 검색은 기본적으로 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 파악하는 것과 관련된다. 이는 종종 함수적 관계의 가치를 이끌어내는 출발점이 되기도 하였다. 예를 들어 s13은 W패턴의 4단계를 3단계의 각 변에 1개씩 타일을 추가하는 재귀적인 방식으로 그렸다. 다음은 s13이 7단계에서 함수적 관계를 찾는 과정에 대한 대화이다.

s13: 이거 잘 파악을 못했어요. 처음에

t: 아 그래서 계속 보고있는거야?

s13: 네

t: 어떻게 한거야?

s13: 이거 1개씩(아래 2개) 빼고 이거 n 개, 이거 n 개, 이거 n 개, 이거 n 개

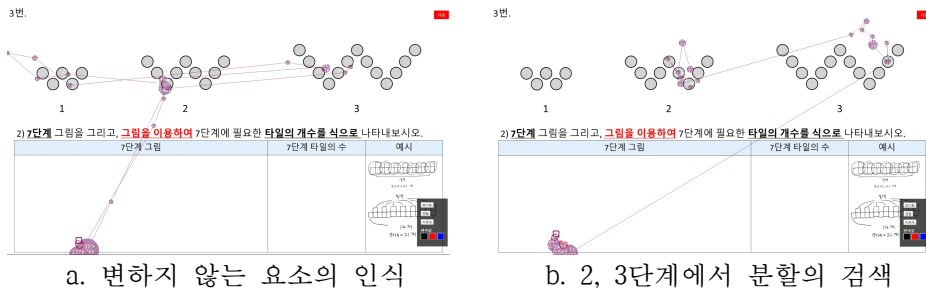
t: 밑에 2개를 빼면 항상 위로 n 개씩 있다?

s13: 네, 여기서는(가운데 상단을 가르키며) 하나 겹치게 있어요

t: 이걸 언제 발견했어?

s13: 7단계에서 발견한 것 같아요.

[그림 IV-19.a]의 시선 흐름을 보면 1, 2, 3단계에서 변하지 않는 요소로 최하단의 좌측 1개의 타일이 지각되고 s13은 이를 미리 쓰기 영역에 그려놓는다. 이후 [그림 IV-19.b]와 같이 2, 3단계에서 불변하는 타일을



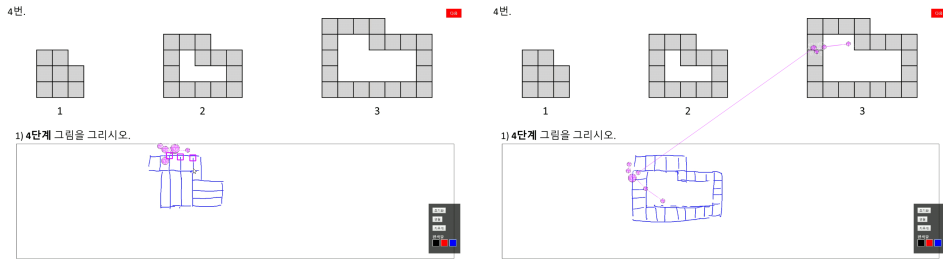
[그림 IV-19] 변하지 않는 요소를 인식할 때와 그 이후의 s13의 시선

제외한 나머지 부분을 관찰하면서 회상자극면담에서 볼 수 있듯이 아래 2개 빼고 위로 n 개씩 있다는 공통성을 발견하게 된다. 즉, 불변하는 요소가 지각되면 그것을 기준으로 패턴의 공간적 분할이 재편되고 이는 함수적 구조의 발견으로 이어졌다.

한편, 단계 사이의 변화 검색은 귀납적 확인의 수단으로 활용되기도 하였다. 예를 들어, s12는 문제4에서 [그림 IV-19.a]와 같이 가운데 흰 영역의 규칙을 이용하여 패턴을 확장하였다. 다음은 관련된 회상자극면담 내용이다.

- t: 이진 모양? 지금 이 눈의 움직임은?
- s12: 개수가 맞는지 보는 걸까요?
- t: 어떤 개수?
- s12: 여기랑 보면서 진짜 잘 그렸는지 아까 것처럼 실수가 없었는지..
- t: 어떻게 비교해? 맞는지 아닌지? 3단계랑 비교해서 어떻게 맞는지 알 수 있어?
- s12: 1씩 늘어나면 맞는거다 이렇게 생각하고
- t: 아 1씩 늘어나면 맞는거다 이렇게, 근데 밑에는 1씩 안늘어자나? 밑에는 확인하는 눈이 없는데 확인 그냥 안한거야?
- s12: 네

회상자극면담 내용과 [그림 IV-20.b]의 안구 운동에서 알 수 있듯이 s12는 3단계와 자신이 그린 4단계의 동일 부분을 비교하면서 1씩 늘어난



a. s12가 4단계를 그리는 과정

b. 3단계와 비교하여 1개 늘어났는지 확인하는 s12의 안구 운동

[그림 IV-20] s12의 상황적 패턴 확장과 재귀적 검증

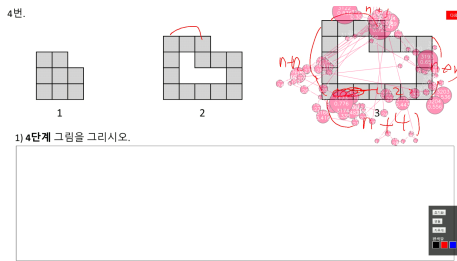
다는 변화의 안정성을 확인함으로써 패턴을 검증하고자 하였다.

요약하면 학생들은 제시된 패턴의 단계를 비교하는 행동을 한다. 이러한 행동은 주로 패턴을 최초로 접하는 근 일반화 단계에서 나타나는데 패턴의 복잡성에 따라 단순히 시지각에 의한 비교뿐 아니라 따라 겹쳐 그리기, 쪼개서 넣어보기 등의 조작적인 행동들이 수반되기도 하였다. 학생들은 이러한 행동을 통해 패턴의 변하는 부분과 유지되는 부분, 변하는 부분의 성장단위 등을 파악하였다. 이러한 불변과 변화의 인식은 패턴의 분할 방법에 영향을 줌으로써 함수적 관계의 발견에 기여하거나 변화의 안정성을 확인하는 검증의 수단으로 활용되기도 하였다.

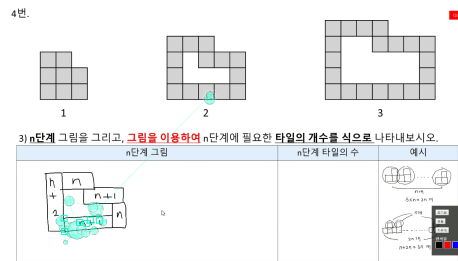
3.3. 단계 중심의 산술적 관계 검색

일단 패턴을 공간적으로 분할하고 나면, 부분 부분별로 4단계나 7단계를 그려나가는데 그때 학생들은 2단계나 3단계에서 대응되는 부분을 계속 참조하면서 패턴을 그린다. 그때 주로 사용하는 추론은 “이 부분은 단계보다 1개 적으니까 6”, “이 부분은 단계보다 2개 많으니까 9” 이다. 학생들은 1, 2개의 사례에서 도출한 단계의 수와 타일의 수 사이의 산술적 관계를 이용하여 일반화 규칙을 추측하였다.

예를 들어, s14는 4번 문제의 근 일반화에서부터 일반화 규칙을 추측하였다. [그림 IV-21.a]의 안구 운동 패턴을 보면 3단계 하나의 단일 사례에서 각 변마다 3과의 산술적인 차이를 이용하여 $n+k$ 꼴로 일반화 규



a. s14의 산술적 관계의 검색



b. s7의 산술적 관계의 검색

[그림 IV-21] 산술적 관계의 검색을 통한 가추 사례

칙을 추측하고 있음을 볼 수 있다. 3단계의 단일 사례를 이용한 추측이기 때문에 밑변은 $3+4=7$ 로부터 $n+4$ 로 불완전한 가설이 제기되었다. 이러한 s14의 추론은 다음과 같이 가추로 해석할 수 있다.

(결과) 3단계 그림의 밑변의 타일의 수는 $3+4=7$ 이다.

(규칙) n 단계 그림의 밑변의 타일의 수가 $n+4$ 이면, 3단계 그림의 밑변의 타일의 수는 $3+4=7$ 이다.

⇒(사례) n 단계 그림의 밑변의 타일의 수가 $n+4$ 이다.

[그림 IV-21.b]의 s7의 사례 역시 유사하게 2단계의 각 부위가 2와 맺고 있는 산술적인 관계를 이용하여 일반식을 도출하였고, 그 결과 양 끝을 제외한 아랫변의 타일의 수가 $n+1$ 의 일차식 형태로 가추되었다.

s17은 문제4의 근 일반화, 원 일반화 문항에서 밑변의 함수적 규칙을 찾지 못하였다. 따라서 $n+k$ 꼴의 나머지 변의 규칙을 찾아 그린 다음 윗변에 맞추어 밑변을 그리고 타일의 수를 직접 세었다([그림 VI-25.a]와 동일한 행동). 다음은 s17이 n 단계 일반식을 구하기 위해 밑변에 대한 규칙을 가추하는 과정에 대한 설명이다.

t: 이거 규칙은 어떻게 찾은거야?

s17: 애는 아까(7단계) 보니까 14개였잖아요. 그래가지고 7단계일 때 13개였으니까

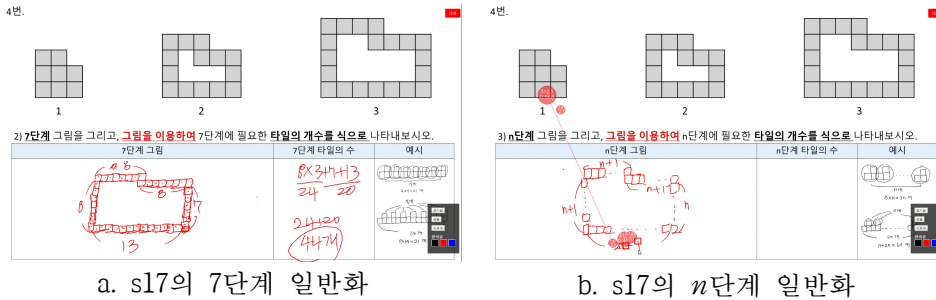
t: 응

s17: 보는데 이게 7 뒀지. 7에다 2를 곱하면 14개인데 1빼면 13이자나요. 그래서 위예를 보니깐 2곱하면 1빼면 1이자나요. 그래서 그렇게 한거 같아요.

t: 아 그럼 아까 7단계 때 13 나온거 가지고 추측을 한거야?

s17: 그런거 같아요

s17: (1단계 보는 순간) 옆에 빼면 1개 남으니깐 $2n-1$ 이 맞구나.



[그림 IV-22] 산술적 관계의 검색을 통한 s17의 가추와 귀납

즉, s17은 단계의 수 7로부터 13을 만드는 산술적인 방법 $13 = 7 \times 2 - 1$ 로부터 밀변의 규칙 $2n-1$ 을 추측하였다. 이는 공간적인 분할로는 얻을 수 없는 규칙이다. 이렇게 추측된 규칙은 1단계를 통한 귀납의 과정을 거친 후 최종적으로 수용되었다.

한편, s2은 문제4에서 먼저 2씩 늘어난다는 재귀적 관계를 이용하여 밀변을 완성하였다. 다음은 이와 관련된 회상자극면담 내용이다.

t: 지금은 뭐하는거지?

s2: 아 지금은 7이면은 몇 개인가 세고 있었어요

t: (해석하기 어려운 시선이 나타남) 이게 뭐하는거라고?

s2: 밑에서 손으로 3 5 7 9 이렇게 세고 있었어요

t: 아.. 그렇게 셋어?

s2: 네 그래서 여기가 15가 됐었어요

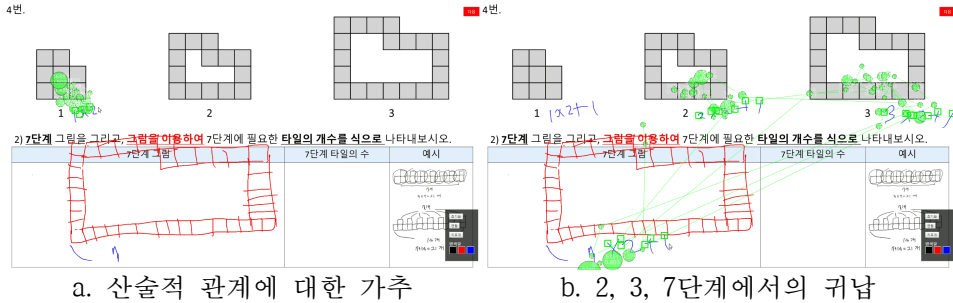
....

(다 그린 후)

s2: 제가 생각한게 맞나 확인하고 있었어요. 거기다 대고,

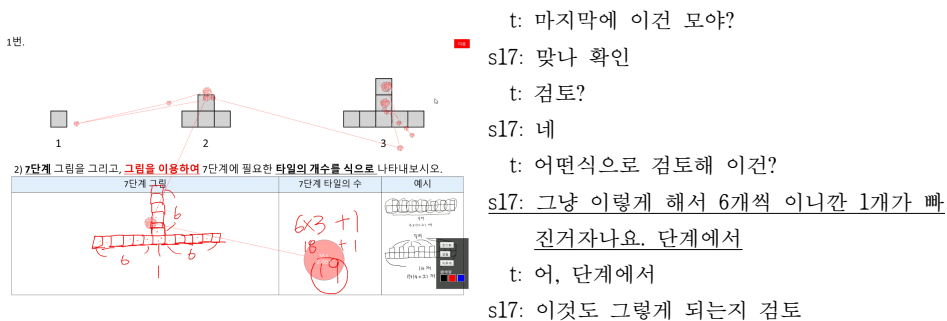
t: 뭘 생각했어?

s2: 단계 수에 2를 곱하고 1을 더하면 된다.



[그림 IV-23] 산술적 관계의 검색에 의한 s2의 가추와 귀납

s2는 [그림 IV-23.a]에서 볼 수 있듯이 먼저 7단계의 밑변에 7을 쓴 후, 1단계를 응시하다가 1×2 까지만 쓴 후 또 한참 응시하였는데, 응시의 분포가 내적인 연산을 하는 형태로 나타났다. s2의 자기보고와 응시의 분포 형태로부터 s2는 단계의 수 1로부터 3을 만드는 산술적 관계를 생각한 것으로 판단할 수 있다. $1 \times 2 + 1$ 을 찾은 후 2단계와 3단계 모두 동일한 산술적 관계가 성립하는지 검색하고 7단계에서 $7 \times 2 + 1$ 이 성립하는 것까지 확인하고 쓴다. 이는 단계의 수를 이용한 산술적인 관계를 모든 단계에서 반복적으로 검색하면서 함수적 관계 $2n+1$ 을 가추하는 과정이라 볼 수 있다. 이와 같이 각 패턴의 동일한 부분이 단계의 수와 동일한



[그림 IV-24] 산술적 관계의 검색을 통한 귀납

산술적 관계를 맺는지 검색하는 것은 가추와 귀납 단계에서 중요하게 사용되는 절차 중 하나였다. 예를 들어 [그림 IV-24]을 보면 s17은 자신이 그린 7단계 패턴을 영역별로 직접 세어 숫자를 표시한 후 1, 2, 3단계에서도 윗부분이 단계에서 1개 **빼** 숫자만큼 있는지 관계를 확인하였다. 다 음은 s13의 문제4의 근 일반화 과정에 대한 회상자극면담의 일부이다.

s13: 어우 밑에 너무 어려웠어요.

(한참 관찰 뒤)

t: 이걸 뭐야?

s13: 이거 보니까, 2단계에서는 $2+(2-1)$ 이고 3단계에서는 $3+(3-1)$ 이었어요. 이 거 양쪽 **빼고**

t: 그걸 어떻게 알았어?

s13: 보니까? 비교해보니까?

t: 찾았어 계속? 뭔가 그런 규칙이 나올 거란걸?

s13: 네, 규칙이 있으니까 도형이.. 이거 냈겠쥬

t: 음, 뭔가 규칙이 있으니까 냈을거다라는 생각에 뭔가 성립하는걸 찾은 거야?

s13: 네

s13의 경우 도형 패턴의 수량적 속성에는 반드시 하나의 식으로 표현 가능한 규칙이 있을 것이라는 가정하에 산술적인 관계를 검색했음을 알 수 있다.

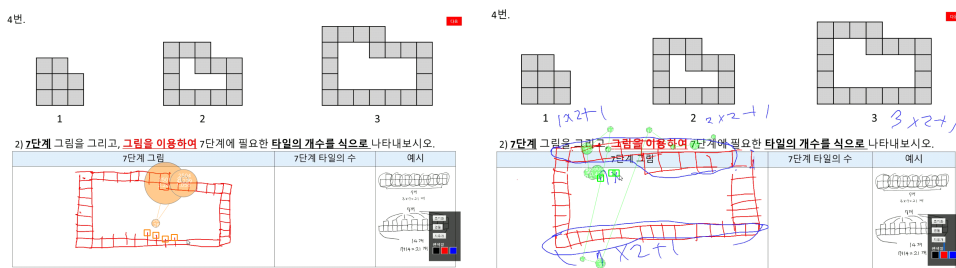
한편, 개인별로 산술적 관계를 검색하는 방식에 차이가 있었다. 예를 들어 s2, s13, s17 등은 단계의 수에서 시작하여 각 분할의 타일의 수를 만드는 산술적 관계를 검색하였는데, 예를 들면 “7(단계)-1=타일의 수”와 같은 형태였다. 그러나 s6, s10 등은 분할의 타일의 수를 단계의 수로 만드는 산술적 관계를 검색하였는데, 예를 들면 “1 빼면 3(단계의 수)”, “2개 빼면 2(단계의 수) 만큼 있다”와 같은 형태였다. 또 산술적 관계의 검색에 있어서 시각적인 추론도 함께 사용되는 것을 확인할 수 있었는데, 예를 들면 s4는 문제4의 밑변에서 대칭성을 인식하고 “가운데 1개를 빼면 양 옆으로 3개(단계의 수)씩 있다”를 가추하고 귀납하였

다.

한편, 단계의 수와 일치하는 특성은 학생들이 상대적으로 쉽게 발견하고 별도의 산술적인 관계의 검색 없이도 빠르게 n 으로 가추되는 것으로 판단된다. 예를 들어 대부분의 학생이 문제2의 근 일반화 단계의 초기 관찰에서 중간 하얀 영역이 단계의 수만큼 있다는 것을 찾았고 문제1에서도 학생들은 n 개의 세로 부분을 빠르게 찾았다. 이는 이미 일차함수를 배운 학생들이기 때문에 항등함수 $y=x$ 에 대한 사전지식이 작용한 것으로 추측할 수 있다.

3.4. 패턴 내 요소 사이의 대응

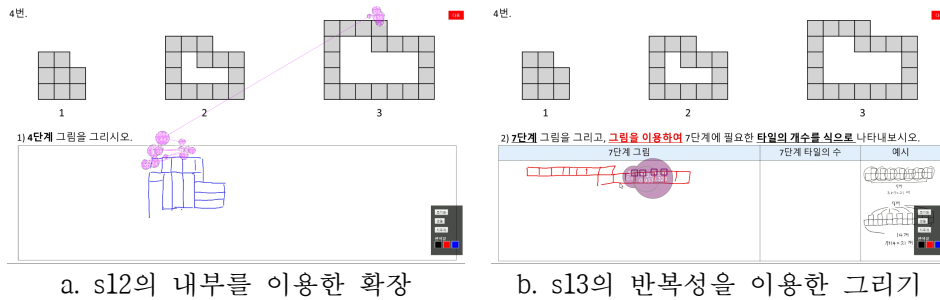
학생들은 패턴을 일반화하는 과정에서 패턴의 단계 내의 요소 사이의 반복성, 기하적 대응 관계를 인식하고 활용하였다. 예를 들어 s12는 문제2에서 내부 하얀 부분의 함수적 규칙을 찾은 후 이를 이용하여 바깥 타일을 그리는 식으로 4단계를 완성하였다. s2, s3, s11, s18은 문제4에서 2씩 증가하는 아랫변의 규칙을 찾는데 어려움을 겪었다. 이들은 [그림 IV-25.a]와 같이 윗변과 아랫변의 너비가 같음을 이용하여 윗변을 응시하면서 아랫변 타일의 경계를 완성하였다. s2의 경우 윗변의 오른쪽 부분을 평행이동시키면 패턴이 직사각형 형태로 변환된다는 것을 인식하고 있었다. 따라서 [그림 IV-25.b]와 같이 아랫변의 개수 $7 \times 2 + 1$ 을 윗변에



a. 윗변을 참조하여 아랫변 그리는
s18의 안구 운동

b. 밑변을 이용하여 윗변의 개수를
구하는 s2의 안구 운동

[그림 IV-25] 패턴 내 요소 사이의 대응 관련 사례



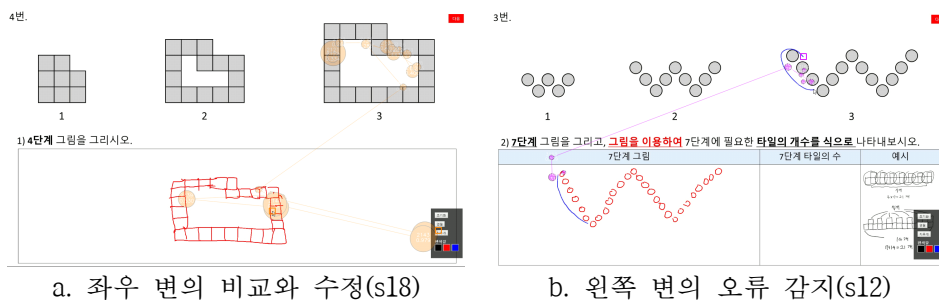
[그림 IV-26] 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용한 패턴의 확장 사례

도 그대로 적용하였다.

s2, s12는 [그림 IV-26.a]와 같은 방식으로 문제4에서 내부의 빈 공간에 대한 규칙을 찾아 그린 후 둘레에 타일을 추가하는 방식으로 패턴을 확장하였다. s13, s18은 [그림 IV-26.b]와 같이 문제4에서 패턴의 상단부를 구성하는 왼쪽 변과 오른쪽 변의 타일의 수가 동일하다는 관계를 이용하여 오른쪽 부분을 매우 빠르게 그렸다.

문제1의 역T패턴에서 3 방향의 변 중 하나만 완성하면 나머지는 빠르게 완성하는 것도 이러한 패턴 내 요소 사이의 대응을 활용하는 예로 볼 수 있다. 특히 문제4와 같이 복잡한 패턴에서는 재귀적 규칙과 함께 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용하여 7단계 그림을 완성한 후에 4개의 사례를 이용하여 함수적 규칙을 찾는 경우가 많았다.

패턴 내 요소 사이의 대응은 귀납의 과정과도 연관이 있었다. [그림 IV-27.a]의 안구 운동을 보면 s18은 4단계를 그리고 다음 문제로 넘어가기



[그림 IV-27] 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용한 귀납적 과정

직전에 3단계에서 가장 윗줄을 제외했을 때 왼쪽 변과 오른쪽 변의 개수가 같아야 함을 확인하였다. 그러나 이 관계가 자신의 4단계 그림에서는 성립하지 않는 것을 깨닫고 수정을 하였다.

다음은 s12가 W패턴에서 자신의 그림을 수정하는 과정[그림 IV-27.b]에 대한 회상자극면담 내용이다.

s12: 딱 세보니까 6이 나와가지고... 여기서는 3개인데

t: 아 그래서 추가했구나. 잘못 그린걸 순식간에 알았네? 3단계랑 비교하면서 깨달은거야?

s12: 네

t: 어떻게 이상한걸 감지했어?

s12: 뭔가 모양이 이쪽이 하나가 부족해 보이고... 그리도 또 제가 그림을 세면서 그렸는데 뭔가 모자라는듯한 느낌이 있었는데

s12는 이미 패턴의 형태가 W이기 때문에 각 변의 길이가 동일하다는 패턴 내 요소 사이의 대응관계를 인식하고 있었다. 이런 상황에서 지각적으로 맨 왼쪽 변이 조금 짧다는 것을 감지하여 확인을 하고 수정하게 된다. 이와 같이 패턴 내에서 반복되는 부분과 기하적으로 대응되는 부분들 사이의 관계를 인식하는 것은 새롭게 확장된 패턴의 오류를 감지하는 데 기여함으로써 귀납적인 행동으로 이어지는 경우가 많았다. 또 [그림 IV-24.a]의 s17의 안구 운동을 보면, 중앙 세로 부분에 대한 함수적 관계만을 확인하는 것을 볼 수 있는데, 이는 역T 패턴에서 3방향의 변이 서로 동일하다는 관계를 귀납의 과정에서에서 활용하고 있는 사례로 볼 수 있다. 즉, 패턴 내 요소 사이의 대응은 패턴의 확장, 분할의 산술적 관계를 구할 때에 필요한 일반화 행동으로 볼 수 있다.

3.5. 이전 문제와의 관계

학생들은 이전에 경험한 패턴과 유사한 지각적 특성을 가진 패턴에 대해서 이전 패턴에서 성공적으로 사용했던 일반화 행동을 새로운 패턴에도 적용하려고 시도하기도 하였다. 예를 들어 s17은 문제4가 문제2와 유

사하게 가운데 흰 부분이 있는 것을 보고 문제2에서 했던 것처럼 흰 부분의 규칙을 찾아 패턴을 그리려고 시도하였다.

s17: 아까 창문처럼 빈거(흰 부분)를 세다가

t: 아 빈 곳을 세고 있었어? 초반에는?

s17: 네, 그러다가 뭔가 아닌것 같아가지고

t: 근데 바로 뭔가 그리는데?

s17: 요거(빈거)를 보다가 위에를 봤는데 위에도 1개씩 차이나는거예요?(단계랑 1개 차이난다). 그래서 일단 5개를 그렸어요.

s17뿐 아니라 s11, s12도 문제4의 근 일반화 단계에서 흰 부분을 이용하려고 시도하거나 실제로 이용하였는데, 이들 역시 모두 문제2에서 흰 부분을 이용하여 패턴을 그렸던 학생들이다.

s6의 경우 문제3에서 규칙성을 파악하는 과정에서 “1개(겹치는 꼭짓점) 빼면 3개, 1개(겹치는 꼭짓점) 빼면 7개”와 같은 방식으로 산술적 관계를 확인하는 과정을 통해 각 변의 함수적인 규칙을 발견하게 되었다. 그 이후 문제4에서도 이러한 방식을 그대로 적용하였다.

t: 이거 5개는 어떻게 그린거야?

s6:

t: 아 요거 빼면 3개니까 여기도 요거 빼면 4개다?

s6: 네

t: 그럼 이 오른쪽은?

s6: 거기도 (꼭짓점) 빼면 3개다.

t: 아 꼭짓점 빼면? 이거 빼면 3개다 이거 엄청 좋아하네 이거? 이 전략을 원래 좋아해?

s6: 오늘 아까 알아냈어요.

t: 아 오늘 알아낸거야? 이게 하다가 통한다는걸 알았어?

s6: 네

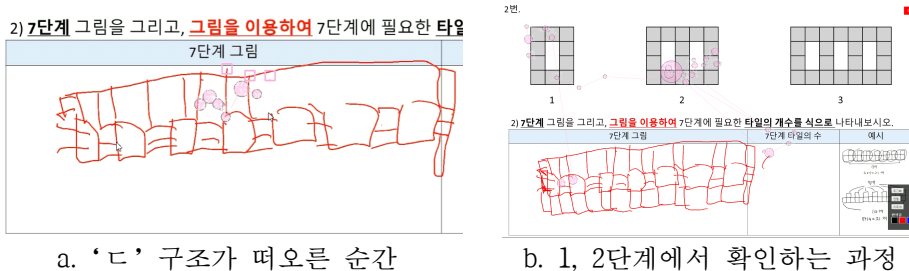
s6은 문제3에서 우연히 꼭짓점을 빼면 단계의 수만큼 나오는 것을 경

험한 후 문제4에서도 동일한 방법을 적용하였다. 문제4도 꼭짓점을 제외하면 단계의 수만큼 나오는 변이 많았기 때문에 이러한 전략이 유용하게 사용될 수 있었다.

한편, s5는 문제4의 아랫변이 3, 5, 7로 증가하는 것을 보고 이전에 풀었던 문제2의 가로 3, 5, 7과 동일하다는 것을 떠올려서 바로 7단계의 가로 길이가 15인 것을 알았다고 보고하기도 하였다.

3.6. 패턴의 확장

패턴의 확장은 도형 패턴을 직접 그려서 확장하는 행동이다. 일부 학생들은 4단계 또는 7단계를 직접 그리는 과정을 통해 반복구조를 발견하는 경우가 있었다. 예를 들어, s11은 창문 패턴에서 흰 부분이 단계의 수만큼 있다는 사실을 이용하여 [그림 IV-28.a]와 같이 먼저 흰 부분을 7개 그린 다음 테두리를 그리고 사이의 블록의 경계를 표시하고 있었



[그림 IV-28] 패턴을 확장하는 과정에서 구조를 가추한 s11의 시선

다. 왼쪽부터 차례로 블록의 경계를 나누던 중간에 s11은 'ㄷ' 구조를 발견하게 된다.

다음은 s11가 시선 흐름 영상에서 [그림 IV-28.a]의 장면을 볼 때 설명한 회상자극면담의 내용이다.

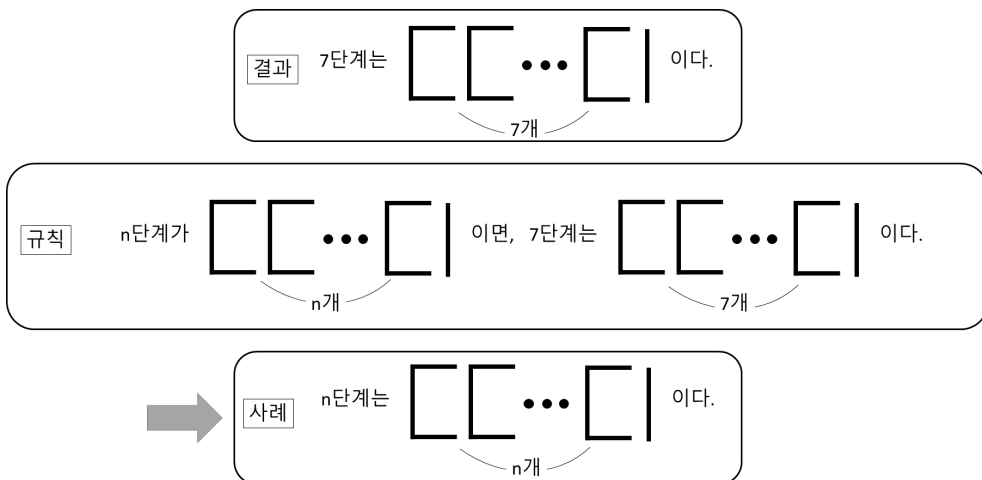
s11: 이때 이걸 보고 이제 깨달았어요.

t: 이때 뭘 깨달은거야?

s11: 이렇게 해서 'ㄷ' 자 모양으로 나가는거, 'ㄷ' 모양으로 해서 마지막에 4개

t: 아 요 순간 알게 된거야? 이때?
s11: 이때 쯤에 규칙이 있다고 생각하고
t: (재생바를 되돌리면서) 이쭈인거 같아? 정확한 시점을 특정하긴 힘들어?
s11: 네, 아무튼 그리다가 생각났어요.
t: 그리다가 생각이 났다.
s11: (영상이 재생되고 있는데 안구 운동을 보더니) 이때쭈, 이거 그릴 때 쯤
에
t: 아 이거 이렇게 그리면서 모양이 나타날 때 쯤.
s11: 네

s11은 4단계에서 ‘ㄷ’ 구조를 찾지 못하고 흰 부분 4개를 그린 후 사이 사이를 연결하여 패턴을 완성하였다. 7단계에서도 동일한 방법으로 7 단계를 그렸다. 일반적으로 학생들이 쓰기 영역에 무언가를 쓰고 있을 때의 시각적 주의는 [그림 IV-28.a]의 경우와 같이 대부분 펜의 주변에 위치하였다. 따라서 왼쪽에서부터 반복적으로 경계를 그리는 과정에서 ‘ㄷ’의 윗부분이 반복적으로 나타나고 해당 부분에 대해 주의가 유도됨으로써 ‘ㄷ’ 구조를 가추하게 되는 것으로 해석된다. [그림 IV-28.b]에서 볼 수 있듯이 s11은 7단계를 완성한 후 바로 1, 2단계에서 동일한



[그림 IV-29] 문제2에서 s11의 가추

‘ㄷ’ 구조를 검색하는 귀납의 과정 후에 7단계 타일의 수를 구조를 반영하여 $6 \times 7 + 4$ 로 적었다. [그림 IV-29]는 ‘ㄷ’ 구조의 가추를 3단 논법으로 나타낸 것이다.

한편 s14는 [그림 IV-30.a]에서 볼 수 있듯이 W패턴의 7단계를 “단계보다 1개 많은 것이 W모양을 이룬다”를 이용하여 그렸음에도 불구하고 중앙 상단 타일의 중복을 고려하지 못하여 7단계 타일의 수를 잘못 구하였다. 다음은 그 이후의 n 단계 기호적 일반화 과정에 대한 회상자극면담 내용이다.

s14: 여기서 그리다가 멈칫 할걸요?

t: 어 그러네 여기서 멈췄네

s14: 선생님한테 여쭙보고 있는거예요

t: 아 이때가 뒤로 돌아갈 수 있냐고

s14: 네, 동그라미를 딱 찍는 순간 알았어요.

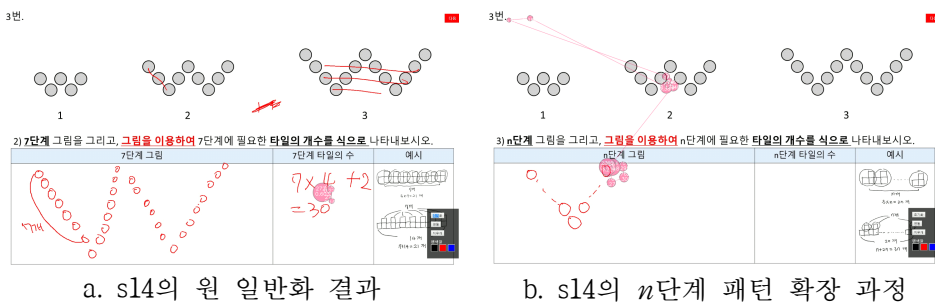
t: 아 여기는 2번이구나? 겹치는구나?

s14: 네

t: 어떻게 근데 찍는 순간에 생각이 나지?

s14: 찍는 순간 아 뭔가 잘못했다.

s14: 그래서 위에도 3개가 있고, $n-1$ 개가 3개다.



[그림 IV-30] 패턴을 확장하는 과정에서 규칙을 가추한 s14의 시선

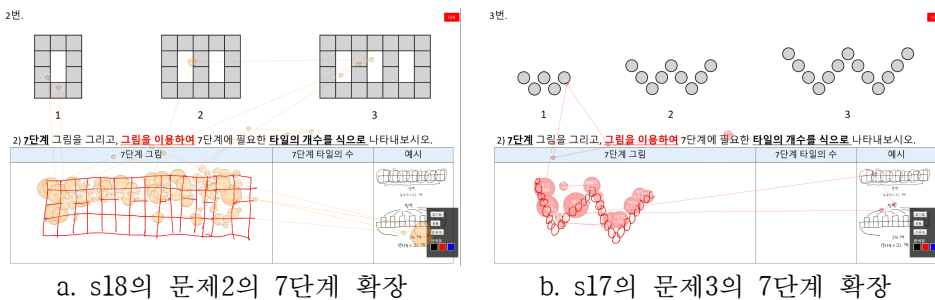
[그림 VI-30.b]에서 볼 수 있듯이 s14는 n 단계를 ...을 이용하여 그리다가 중앙 상단의 타일을 찍는 순간 그 주위를 집중적으로 응시한 후 2단계에

서 대응되는 부분을 또 응시하였다. 이때 s14는 최하단의 2개의 타일을 제외하고 n 씩 셀 때 해당 타일이 2번 중복된다는 것을 깨달았다고 한다. 즉, 패턴을 그리는 과정을 통해 7단계에서 중복해서 셀 타일의 존재를 인식하고 가설을 수정하였다. 이후 s14는 3단계에서 다시 한번 구조를 확인한 후 일반식을 $4(n-1)+3+2$ 으로 적었다.

s11과 s14의 사례는 패턴을 직접 그리면서 확장하는 행동이 규칙성을 발견하고 가설을 생성하는 데 기여할 수 있음을 보여준다. 그러나 그리기 활동이 항상 패턴 일반화를 지원하는 것은 아니다. 패턴을 그리는 순서와 방법에 따라 함께 유도되는 주의가 패턴의 어떤 특성을 발견할 수 있는 가능성을 높이는 주의 패턴과 일치할 때 특히 이러한 현상이 나타났다. 예를 들면, s11의 사례에서는 동일한 형태가 반복적으로 그려지고 그것에 주의가 유도되면서 반복의 단위가 가추되었다. s14의 사례에서는 두 번째 변의 마지막 원소로써 동그라미를 그리면서 주의가 집중되었는데, 다시 3번째 변을 그리려는 순간 해당 동그라미가 2번 겹친다는 것을 인식하게 되었다.

3.7. 패턴을 그리는 방법의 확장

각 문제에서 7단계 패턴을 확장할 때 나타나는 행동으로 4단계 패턴을 그리는 절차를 7단계에 확장하여 적용하는 것이다. 예를 들어 [그림 IV-31.a]에서 s18은 4단계를 그릴 때 먼저 직사각형을 그린 후 흰 부분이 단계의 수만큼 나올 때까지 창문 형태로 칸을 구분하였는데, 원 일반화

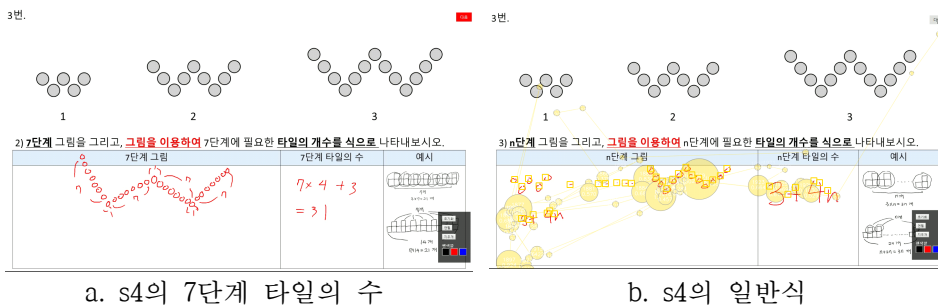


[그림 IV-31] 4단계를 그리는 방법을 7단계의 확장에 적용한 사례

문항이 제시되자마자 이 방법을 이용하여 7단계를 그렸다. 그림을 그릴 때까지의 시선 흐름을 보았을 때 패턴에 응시가 거의 없는 것으로부터 4단계에서 이용한 절차를 7단계에 그대로 적용한 것임을 알 수 있다. s17 역시 단계의 수보다 1개 많은 변으로 W모양을 그리는 방식으로 4단계를 그렸는데, 동일한 방법을 바로 7단계 패턴의 확장에 사용하였다. [그림 IV-31.b]를 보면 문항이 제시되고 패턴에 대한 관찰 없이 바로 7단계를 그린 것을 확인할 수 있다. 학생들은 일단 7단계를 그린 후에 확장한 패턴의 타당성을 확인하거나 타일의 수를 세는 방법을 찾았다. 만약 오류가 있거나 4단계에만 한정적으로 적용되는 방법을 확장할 경우 결함이 있는 7단계 패턴이 그려졌다.

3.8. 식의 확장

산술적 관계의 검색 사례에서 학생들이 원 일반화 문항에서 패턴의 각 분할된 영역에 속한 타일의 수를 최대한 7을 이용하여 표현하려고 노력한다는 것을 확인했다. 이와 같이 7을 중심으로 표현한 식에서 7만 n 으로 바꾸어 일반식을 구하는 경우가 많았다. 즉, 식의 적용 범위를 확장하는 것이다. 예를 들어, s4는 W패턴의 7단계를 제대로 그렸음에도 불구하고 타일의 수를 잘못 계산하여 $7 \times 4 + 3 = 31$ 을 얻었다[그림 IV-30.a]. s4는 7단계에서 구한 식에서 7만 n 으로 바꾸어 확장을 하였는데, n 단계 일반화 전체 과정에서의 시선 흐름인 [그림 IV-32.b]를 보면, 귀납의 과정이 뒤따르지 않았기 때문에 이러한 확장을 통해 얻어진 잘못된 일반식

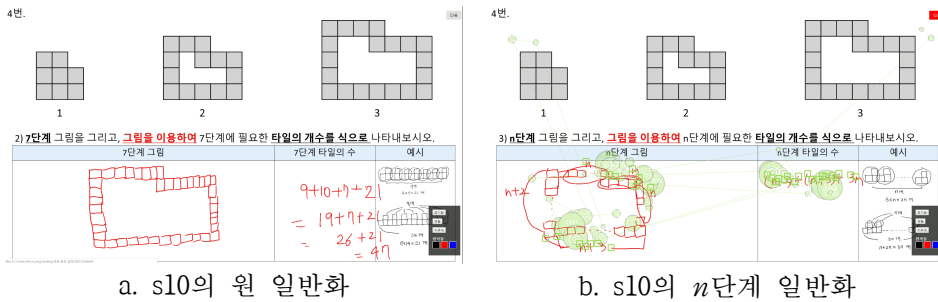


[그림 IV-32] s4의 식의 확장 사례

은 수정될 수 없었다.

s10의 경우 모든 문제에서 7단계에서 구한 식에서 7을 n 으로 바꾸는 방식으로 일반식을 구하였다. 따라서 7단계를 제대로 구한 경우에만 일반식도 제대로 구할 수 있었다. [그림 IV-33.a]에서 s10은 $9+10+7+21$ 로 타일의 수를 계산하였다. 이후 n 단계에서 s10은 머릿속으로 7단계의 식을 떠올리면서 7을 n 으로 바꾸었다고 보고하였다[그림 IV-33.b]. 그 과정에서 실수가 있었고 귀납적 확인의 과정을 거치지 않은 결과 잘못된 일반식이 도출되었다.

7단계에서 7을 이용하여 패턴의 구조를 반영한 타일의 수를 구한 경우 식의 확장을 통해 올바른 일반식을 얻을 수 있었단, 반대로 7단계에서 구한 타일의 수 잘못된 경우 확장된 일반식에도 오류가 있었다.



a. s10의 원 일반화

b. s10의 n 단계 일반화

[그림 IV-33] s10의 식의 확장 사례

3.9. 식의 값 검색

학생들은 다양한 경로로 구한 일반식을 검증하기 위하여 n 에 숫자를 대입했을 때 실제로 해당 단계의 타일의 수가 나오는지 검색하기도 하였다. 예를 들어, s7은 1번 패턴의 근 일반화와 원 일반화를 모두 재귀적으로 해결하였다. s7은 n 단계를 일반화할 때 각 단계 사이의 차가 3이라는 것과 1단계 타일의 수가 1개라는 것을 바탕으로 식을 $1+3n$ 으로 추측하였다. 이후 $1+3n$ 에서 문자 n 에 긴 응시가 나타나는데[그림 IV-32.a], 이때 s7은 머릿속으로 2, 3을 식에 대입해 본 후 틀렸다는 걸 알았다고 한다. s7은 다시 식을 $1+(3n-1)$ 을 수정하고 또 식에 대입해보았는데 그

1번.

3) n 단계 그림을 그리고, 그림을 이용하여 n 단계에 필요한 타일의 개수를 식으로 나타내보시오.

n 단계 그림	n 단계 타일의 수	예시
	$1+3n$	

a. 식에 대입하는 안구 운동

1번.

3) n 단계 그림을 그리고, 그림을 이용하여 n 단계에 필요한 타일의 개수를 식으로 나타내보시오.

n 단계 그림	n 단계 타일의 수	예시
	$1+3n$	

b. 수정된 식에 대입하는 안구 운동

[그림 IV-34] s7이 식의 값을 확인할 때의 안구 운동

때의 안구 운동은 [그림 IV-34.b]이다. s7은 이러한 시행착오적 추측과 확인을 반복한 끝에 일반식을 구하였다.

s15는 7단계를 $4+42$ 로 구하였고, 42가 6×7 (단계)이기 때문에 일반식이 $4+6n$ 이 될 것이라고 가추하였다. s15는 자신의 가설이 성립하는지 확인하기 위하여, [그림 IV-35.a]의 시선 흐름에서 볼 수 있듯이 2단계 패턴의 수 16을 직접 세었다. 그리고 [그림 IV-35.b]에서 알 수 있듯이 7을 n 으로 바꾸었을 때의 식 $4+6n$ 에 $n=2$ 를 대입했을 때 실제로 16이 나오는지 머릿속으로 확인하였다.

식에 대입하는 과정은 수치 기반의 연결전략이나 추측과 확인 전략을 사용한 경우와 함께 연계되어 많이 사용되었고 도형적으로 해결한 경우에도 귀납의 단계에서 일반식을 점검하는 목적으로 사용되었다.

2번.

2) 7단계 그림을 그리고, 그림을 이용하여 7단계에 필요한 타일의 개수를 식으로 나타내보시오.

7단계 그림	7단계 타일의 수	예시
	$4+42$ (6×7)	

a. 2단계를 센 후 식에 대입할 때의 안구 운동

t: 어떤 식으로 검토한거야 이걸 여기 막 쳐다보는데?

s15: n 이 2일 때 이거 전체 개수가 성립하는가, 전체가 16이니까 이 공식을 대입했을 때 16이 맞는가 검사하고 있었어요.

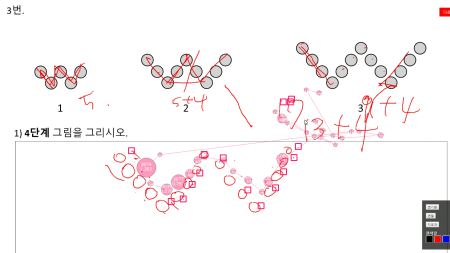
t: 이 식?

s15: 아니요 $4+6n$ 이요.

b. 회상자극면담 내용

[그림 IV-35] 식의 값 검색을 통한 s15의 귀납 사례

3.10. 재귀적 수치의 확장



t: (17을 가르키며)이건 모아?

s14: 아 그건 4단계 개수인데, 맞는지 지금 보는거예요.

t: 아 17이 나와야 하니깐 17이 맞는지를?

a. 4단계 개수를 세고 확인하는 안구 운동

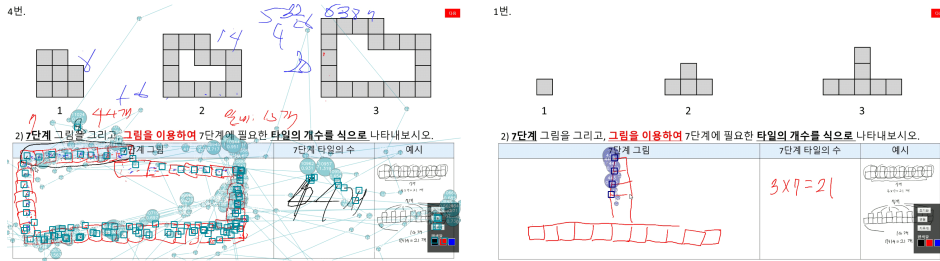
b. 안구 운동과 관련된 회상자극면담 내용

[그림 IV-36] 재귀적 수치를 활용한 s14의 귀납 사례

몇몇 학생들은 자신이 확장하여 그린 패턴의 타당성을 재귀적인 방법으로 구한 수를 이용하여 검증하고자 하였다. 예를 들어 [그림 IV-36.a]에서 s14는 패턴에서 타일의 수가 4씩 증가한다는 것을 이용하여 4단계 타일의 수 17을 적어놓았다. 그리고 자신이 확장한 4단계 패턴의 타일을 하나씩 세어 17이 맞는지를 확인하였다.

s8과 s9는 모든 문제에서 수치 중심의 재귀적 접근을 사용하였고, 모든 패턴의 일반식을 구하지 못한 학생들이다. 이들의 공통적인 특징은 재귀적으로 구한 수를 귀납의 과정에 활용하였다는 것이다. s8은 재귀적인 관계를 이용하여 7단계 타일의 수가 44개라는 것을 구하여 화면에 적어놓았다. [그림 IV-37.a]는 7단계를 확장하는 과정의 후반부 100초 동안의 시선 흐름이다. 자신이 그린 패턴의 타일의 수가 44개가 될 때까지 계속 세고 변을 늘리고 줄이고를 반복했다. 100초 동안 단 한번도 패턴의 1, 2, 3단계를 응시하지 않았음을 확인할 수 있다.

s9의 경우 문제 1번에서 차이 전략을 사용하였는데, [그림 IV-37.b]에서 볼 수 있듯이 먼저 일정한 차 3에 단계의 수 7을 곱하여 21이라고 타일의 수를 적어놓은 후에 21개가 되도록 그림을 그렸다. 21개라는 타일의 수도 잘못된 것이지만 패턴의 구조를 고려하지 않았기 때문에 세 방향의 변의 길이가 달랐다. 이러한 과정은 시행착오적 추측과 확인을



a. s8의 문제4의 7단계 확장 과정

b. s9의 문제1의 7단계 확장 과정

[그림 IV-37] 재귀적으로 확장한 수치에 패턴을 투영하는 사례

통해 재귀적으로 구한 수에 그림을 투영한 것으로 해석할 수 있다.

재귀적 확장을 통해 구한 타일의 수는 함수적 관계를 이용하여 확장한 4단계나 7단계 패턴을 일종의 더블카운팅 같은 방식으로 검증하는 데 유용하게 사용되었다. 이러한 재귀적 수치를 이용한 귀납적 점검은 Amit & Neria(2008)의 연구에서도 보고된 바 있다. 그러나 s8, s9와 같은 학생들은 재귀적인 확장에 기초한 수치에만 의존하여 패턴을 확장함으로써 비효율적인 일반화 과정을 초래하거나 잘못된 일반화를 하였다.

3.11. 행동의 특성

학생들의 행동들은 완전히 배타적으로 구분할 수 있는 것이 아니라 서로 연관을 맺고 상호작용하였으며 동시에 나타나기도 하였다. 예를 들어, [그림 IV-18]과 같이 단계 사이의 변화를 검색하기 위해 1단계를 2단계에 쪼개서 넣는 행동은 패턴의 공간적 분할을 하면서 단계 사이의 변화를 검색하는 것으로 볼 수 있다. 2.4.1에서 이야기하였듯이 단계의 수를 이용한 분할은 패턴의 공간적 분할과 산술적 관계의 검색을 동시에 하는 행동으로 해석할 수 있다. 또 여러 분할 방식을 시도하는 과정에서 분할 방식의 타당성에 대한 점검은 산술적 관계의 검색을 통해 이루어졌다.

동일한 문제에 대해서 각 학생들이 사용하는 일반화 행동의 유형에는 차이가 있었다. 예를 들어 s2([그림 IV-23.a]), s7([그림 IV-21.b]), s14([그림 IV-21.a]), s17([그림 IV-22.a])는 단계 중심의 산술적 관계 검색을 통

해 문제4의 일반식을 가추하였지만, s5([그림 IV-12.b]), s12([그림 IV-12.a])는 단계의 수에 의한 분할을 통해 일반식을 가추하였다. 그러나 단계의 수에 의한 분할은 패턴의 공간적 분할과 단계 중심의 산술적 관계 검색이 동시에 이루어지는 행동이라는 점을 생각하면, 결국 함수적 관계를 가추하는 단계에서는 패턴의 공간적 분할과 단계 중심의 산술적 관계 검색이 필수적임을 알 수 있다. 또 모든 학생들이 초반에 단계 사이의 변화 검색을 통해 패턴의 성장방법을 파악하였다. 따라서 행동의 순서는 다를지라도 단계 사이의 변화 검색, 패턴의 공간적 분할, 단계 중심의 산술적 관계 검색은 함수적 관계를 가추하는 단계에서 공통적으로 실행된 행동이라 할 수 있다.

한편, s18은 문제4에서 좌우 변의 길이가 1 차이라는 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용하여 자신이 확장한 4단계 패턴을 귀납적으로 검증하였지만([그림 IV-27.a]), s12([그림 IV-20.b])는 재귀적인 관계를 이용하여 자신이 그린 4단계를 검증하고자 하였다. 가추 단계와 달리 귀납 단계에서는 학생마다 가추한 가설을 검증하기 위해 실행하는 행동의 유형에 차이가 있었다.

한편, 특정 학생들은 이전 문제에서 사용했던 성공적인 전략을 계속 사용하려는 경향이 있었다. 예를 들어 s12은 앞에서 살펴보았듯이 단계 수에 의한 분할을 문제1, 문제3, 문제4의 규칙을 가추하고 귀납하는 데 동일하게 활용하였다. s6과 s10은 모든 문제에서 식의 확장을 사용하였다. 이전 문제와의 관계는 학생들의 이러한 경향과 관계된 행동이라 할 수 있다. 그러나 대부분 문제에 따라 학생이 시도하는 행동의 유형과 순서가 달랐다. 예를 들어 s5의 경우 문제4에서는 단계의 수로 분할하는 행동을 하였지만([문제 IV-12.b]), 문제1, 문제2, 문제3에서는 지각적 특성을 기준으로 패턴을 분할한 후 산술 관계의 검색을 통해 함수적 규칙을 찾았다. 또한 s11([그림 IV-28.a])과 s14([그림 IV-30.b])가 패턴을 확장하는 과정에서 각각 반복구조와 겹치는 구조를 인식하는 ‘아하!의 순간’들이 다른 문제에서도 동일하게 나타나는 것은 아니었다.

정리하면, 학생들의 행동들은 완전히 배타적으로 구분할 수 있는 것이

아니라 서로 연관을 맺고 상호작용하였으며 동시에 나타나기도 하였다. 학생의 사전경험과 지식, 패턴의 구조에 따라 일반화를 위해 시도하는 행동의 유형과 순서가 다양한 양상으로 나타났다. 그러나 함수적 관계를 성공적으로 가추하는 학생들에게서는 3가지 행동, 패턴의 공간적 분할, 단계 사이의 변화 검색, 단계 중심의 산술적 관계 검색이 공통적으로 나타났다.

4. 시각적 주의

4.1. 안구 운동 지표

질적 분석 결과를 토대로 안구 운동 지표를 해석함으로써 도형 패턴의 일반화 과정에서 학생들의 시각적 주의의 분포 양상과 특징에 대해 분석하고자 하였다.

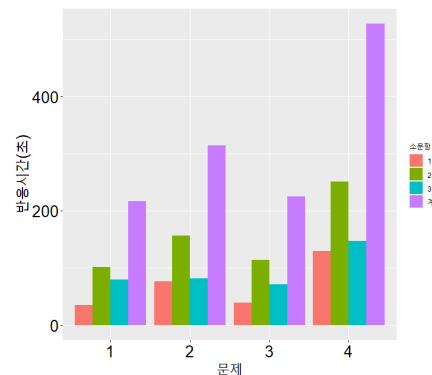
4.1.1. 반응시간

<표 IV-8>는 각 문제의 문항별 반응시간을 나타낸 것이다. 반응 시간은 문항별로 응시와 도약에 소요된 시간의 총합을 계산하여 구하였다. 원 일반화(M=155.84, SD=50.85), 기호적 일반화(M=94.82, SD=28.09), 근 일반화(M=70.03, SD=25.55) 순서로 반응시간이 길었다. 반복측정 분산분석 결과 이러한 소문항 간 반응시간의 차이는 통계적으로 유의하였다($F(2,32)=31.159$, $p<.001$). 근 일반화 문항에서는 3단계와 재귀적인 관계를 이용하여 4단계를 그리고 빠르게 다음 문항으로 넘어가는 경우가 많았다. 그러나 [표 IV-6]에서 볼 수 있듯이 원 일반화 문항에서는 대부분 함수적 관계를 찾는 과정이 나타났기 때문에 시간이 많이 소요되었다. 대

<표 IV-8> 반응시간(초)

문제	근 일반화 (N=17)	원 일반화 (N=17)	기호적 일반화 (N=17)	전체
1	35.34(18.20)	101.62(36.41)	79.62(39.84)	216.58(70.79)
2	76.18(31.45)	156.74(72.23)	81.61(34.73)	314.53(113.19)
3	39.36(22.94)	114.04(88.98)	71.51(38.28)	224.91(108.72)
4	129.22(63.43)	250.95(78.58)	146.51(65.65)	526.68(141.07)
계	70.03(25.55)	155.84(50.85)	94.82(28.09)	

주. 괄호안의 값은 표준편차(SD)를 나타냄.



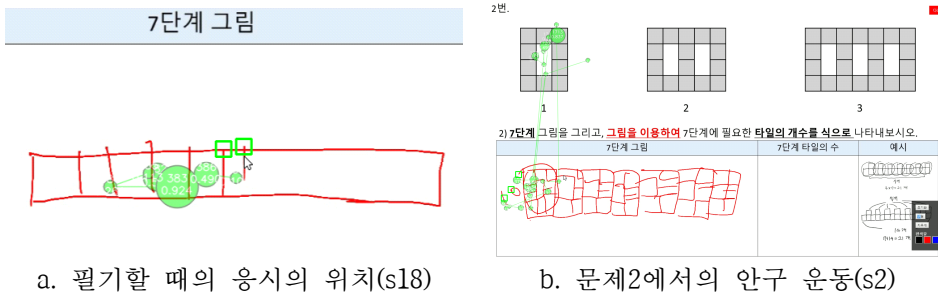
부분 학생들은 분할 별로 함수적 관계를 찾아 7단계를 그리고 타일의 수를 나타냈다. 일부 학생들은 상황적 관계를 이용하여 7단계를 그리거나 재귀적 관계를 이용하여 7단계를 그린 후 7단계의 타일의 수를 식으로 나타낼 때, 함수적 관계를 단계의 수 7을 이용하여 최대한 표현하려고 노력하였다. 즉, 대부분 7단계에서 함수적 관계를 찾는 일반화가 이루어졌다. 오히려 기호적 일반화 단계에서는 함수적 관계를 일반식으로 나타낸 후 몇 개의 사례를 통해 귀납적 검증을 하였기 때문에 상대적으로 시간 소요가 적었다. 이러한 이유로 근 일반화 단계나 기호적 일반화 단계보다 원 일반화 단계에서 반응시간이 긴 것으로 해석할 수 있다. 문제별 반응시간의 경우 문제4(M=526.66, SD=141.07), 문제2(M=314.53, SD=113.19), 문제3(M=224.91, SD=108.72), 문제1(M=216.58, SD=70.79) 순으로 길었다. 반복측정 분산분석 결과 문제에 따른 반응시간의 차이는 통계적으로 유의하였다($F(3,48)=35.582, p<.0001$). 사후분석 결과 문제1과 문제3 사이의 반응시간 차이만 통계적으로 유의하지 않았다.

4.1.2. AOI별 응시시간과 응시율

<표 IV -9> 문항별 AOI의 응시시간과 응시율

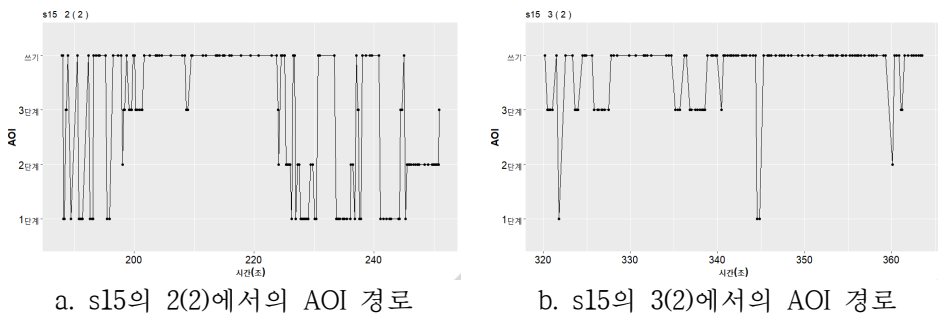
		근 일반화(N=17)				원 일반화(N=17)				기호적 일반화(N=17)				전체 문항(N=17)			
		P1	P2	P3	W	P1	P2	P3	W	P1	P2	P3	W	P1	P2	P3	W
문제1	응시 시간(초)	1.20	3.46	5.10	21.74	0.56	2.83	5.39	73.60	0.90	1.32	1.05	58.50	2.66	7.61	11.54	153.84
	응시율	0.04	0.11	0.17	0.66	0.01	0.03	0.06	0.80	0.01	0.02	0.01	0.84	0.01	0.04	0.06	0.78
문제2	응시 시간(초)	3.42	5.04	3.75	56.96	4.90	5.49	3.71	118.89	2.06	2.54	2.59	59.47	10.38	13.07	10.05	235.32
	응시율	0.05	0.06	0.06	0.82	0.04	0.04	0.03	0.83	0.03	0.03	0.03	0.83	0.04	0.05	0.04	0.82
문제3	응시 시간(초)	2.84	5.50	7.93	18.41	3.84	8.33	6.45	77.12	1.60	4.70	3.90	48.20	8.28	18.53	18.28	143.73
	응시율	0.08	0.13	0.22	0.55	0.03	0.05	0.06	0.81	0.02	0.06	0.05	0.80	0.04	0.09	0.09	0.71
문제4	응시 시간(초)	7.42	17.86	25.27	61.89	6.80	14.94	17.55	169.66	3.22	11.56	12.32	92.68	17.44	44.36	55.14	324.23
	응시율	0.06	0.13	0.22	0.57	0.03	0.06	0.08	0.77	0.03	0.08	0.08	0.75	0.04	0.09	0.12	0.69
전체 문제	응시 시간(초)	14.88	31.85	42.05	158.99	16.10	31.59	33.09	439.27	7.78	20.12	19.86	258.85	38.76	83.56	95	857.11
	응시율	0.06	0.13	0.17	0.63	0.03	0.06	0.06	0.78	0.02	0.06	0.06	0.77	0.03	0.07	0.08	0.74

<표 IV-9>는 문항별 AOI의 응시시간과 응시율을 나타낸 것이다. 응시율은 보면 전체 응시시간 중 쓰기 영역을 보는 시간이 74%를 차지한다. 일반적으로 펜으로 쓰기 영역에 무언가를 필기할 때 응시는 [그림 IV-38.a]와 같이 펜의 끝과 일치하였기 때문에 패턴을 그리는 동안에 쓰기 영역을 많이 응시하였다. 또한 학생들은 [그림 IV-12.b]와 같이 자신이 그린 패턴을 이용하여 규칙을 찾거나 [그림 IV-20.b]와 같이 자신이 확장한 패턴을 검증할 때도 쓰기 영역을 응시하였다. 또 식을 쓰는 영역 역시 AOI 분류에서 쓰기 영역에 포함되어 있다. 따라서 74%에는 쓰기 영역에 패턴을 그리고 식을 쓸 때의 응시시간과 일반화하는 과정에서 자신이 그린 패턴을 활용할 때의 응시시간이 포함된 것으로 해석할 수 있다.



[그림 IV-38] 필기할 때 응시의 위치와 문제2에서의 안구 운동

한편, 학생들은 평균적으로 패턴의 1, 2, 3단계를 각각 3%, 7%, 8% 정도 응시하였다. 그러나 이러한 응시비율은 패턴의 유형에 따라 달랐다. 문제2의 경우에는 1단계, 2단계, 3단계의 응시비율이 각각 4%, 5%, 4%로



[그림 IV-39] s15의 문제2와 문제3에서의 AOI 경로 비교

큰 차이가 없었지만, 다른 3개의 패턴에서는 1단계의 응시비율이 다른 단계의 절반 이하였다. 예를 들어, [그림 VI-39]는 s15의 문제2, 문제3의 원 일반화 문항에서의 AOI 이동 경로를 그래프로 나타낸 것이다. [그림 VI-39.a]를 보면 문제2에서는 3단계보다는 1, 2단계를 더 자주 본 반면, [그림 VI-39.b]를 보면 문제3에서는 거의 3단계만을 응시하며 7단계를 그리고 식을 세웠음을 확인할 수 있다.

요약하면 학생들은 문제1, 문제3, 문제4와 같은 유형의 성장패턴에서는 주로 2단계나 3단계만을 이용하여 일반화를 하였다. 그러나 문제2에서는 상대적으로 1단계의 응시율이 높았다. 이는 문제2가 A, AB, ABB, ... 꼴의 패턴이기 때문에 그림을 그리거나 반복단위를 발견하는 과정에서 A와 B를 모두 포함하는 1단계를 자주 활용한 것으로 해석할 수 있다. 따라서 패턴의 유형에 따라 학생들이 제시된 사례를 이용하는 방식에도 차이가 있음을 알 수 있다. 그러나 회상자극면담에서 일부 학생이 “1단계(문제4)는 구멍이 없어서 대표성이 없기 때문에 2단계에 표시했어요(s9)”라고 말한 것을 보았을 때, 문제1, 문제3, 문제4의 경우 1단계가 2, 3단계가 공통으로 갖는 지각적 특성을 보이지 않기 때문에¹⁹⁾ 일반화 과정에서 상대적으로 적게 참조했을 가능성을 배제할 수 없다. 1단계가 2, 3단계와 동일한 지각적 특성을 가지는 성장패턴에서도 1단계를 잘 활용하지 않는지에 대해서는 추가적인 확인이 필요하다.

4.1.3. AOI 사이의 전환횟수

<표 IV-10>은 문항별 AOI 간 전환횟수를 정리한 것이다. 문제1, 문제3, 문제4에서는 쓰기 영역과 1단계 사이의 전환횟수가 상대적으로 적고 반면에 문제2에서는 쓰기 영역과 1단계 사이의 전환횟수가 가장 많은 것을 확인할 수 있다. 시선 흐름을 보면 문제1, 문제3, 문제4의 경우 [그림 IV-10.a], [그림 IV-12.a], [그림 IV-21.a]와 같이 패턴을 그리거나 규칙을 찾

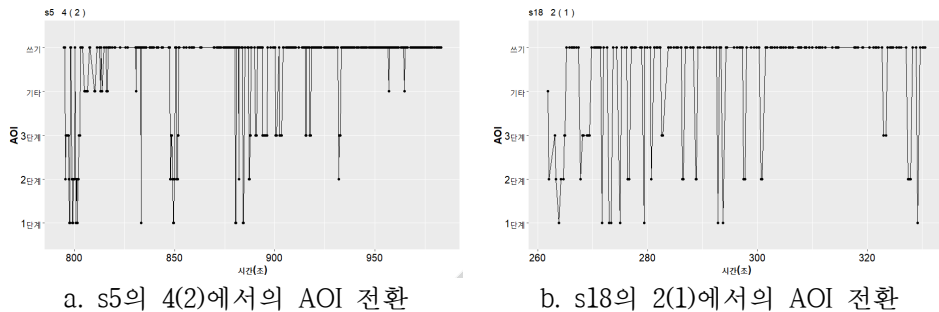
19) 문제1의 경우 1단계는 정사각형 1개로 구성되어 있어서 역T 모양이 아니다. 문제3의 경우도 1단계는 5개의 타일이 뭉쳐있어서 W형태가 아니다. 문제4에서도 1단계만 2, 3단계와 달리 가운데 구멍이 없다는 특징이 있다.

<표 IV-10> AOI 간 전환횟수

		1단계 -2단계	2단계 -3단계	1단계 -3단계	단계 간 총합	쓰기 -1단계	쓰기 -2단계	쓰기 -3단계	쓰기-단계 간 총합	전체
문제1 (N=17)	근 일반화	1.94	4.82	0.24	7.00	1.59	5.29	8.53	15.41	22.41
	원 일반화	1.24	3.12	0.12	4.47	2.29	6.82	6.35	15.47	19.94
	기호적 일반화	0.41	1.06	0.00	1.47	2.41	3.41	2.29	8.12	9.59
문제2 (N=17)	근 일반화	2.41	2.76	0.65	5.82	9.53	9.71	3.82	23.06	28.88
	원 일반화	3.18	2.59	0.18	5.94	9.06	7.82	4.00	20.88	26.82
	기호적 일반화	2.18	1.29	0.18	3.65	5.76	4.88	2.82	13.47	17.12
문제3 (N=17)	근 일반화	6.41	6.24	0.94	13.59	3.18	4.41	8.59	16.18	29.76
	원 일반화	5.41	4.82	0.59	10.82	6.06	11.65	6.24	23.94	34.76
	기호적 일반화	2.12	2.76	0.12	5.00	4.82	8.00	3.94	16.76	21.76
문제4 (N=17)	근 일반화	11.94	20.65	1.71	34.29	5.24	15.41	22.41	43.06	77.35
	원 일반화	8.47	11.71	0.94	21.12	10.59	21.76	20.88	53.24	74.35
	기호적 일반화	4.18	4.71	0.88	9.76	7.59	17.53	13.88	39.00	48.76

을 때 주로 2단계와 3단계를 활용하는 것을 확인할 수 있다. 한편, 문제 2에서는 [그림 IV-38.b]처럼 패턴을 그리거나 규칙을 찾을 때 1단계를 응시하는 경우가 많았다. [그림 IV-45.b], [그림 IV-49.a]에서도 1단계와 쓰기영역 사이의 전환이 2, 3단계와 쓰기영역 간 전환보다 많음을 볼 수 있다. 이는 문제2에서만 1단계의 응시율이 상대적으로 높았던 것과 관계되는 결과로 문제2가 A, AB, ABB, ... 꼴의 패턴이기 때문에 쓰기 영역에 그림을 그리거나 식을 쓸 때 1단계를 반복적으로 참조한 것으로 해석할 수 있다.

<표 IV-10>를 보면 1단계-2단계, 2단계-3단계 간 전환횟수는 평균 10회 이상인 반면 1단계와 3단계 사이의 전환횟수는 2회 미만으로 매우 적은 것을 볼 수 있다. 실제로 시선흐름을 보면 학생들은 [그림 IV-13.b], [그림 IV-18.b]와 같이 패턴을 관찰하거나 동일한 분할을 비교할 때 연속된 두 단계를 주로 이용하였다. 즉, 학생들은 도형 패턴을 일반화할 때 주로 연속된 단계를 비교한다고 할 수 있다.



[그림 IV-40] 일반화 과정에서 AOI 사이의 시선 전환 예

한편, 모든 문제의 모든 문항에서 쓰기-단계 간 전환횟수가 단계 간 전환횟수의 2배 이상이었다. [그림 IV-19.b], [그림 IV-20.a]에서 볼 수 있듯이 학생들은 패턴의 규칙을 완벽히 파악한 다음에 패턴을 한 번에 그리는 것이 아니라 그림을 그려가면서 계속 패턴을 참고한다. 또 [그림 IV-20.b], [그림 IV-23.b]와 같은 시선 흐름에서 알 수 있듯이 확장한 패턴이나 식을 검증할 때에도 자신이 그린 패턴과 각 단계들을 반복적으로 비교한다. [그림 IV-40]의 s5와 s18의 시간에 따른 AOI 전환 그래프를 보면 문항을 해결하는 과정에서 꾸준히 쓰기 영역과 단계 사이의 시선 전환이 있음을 확인할 수 있다. 즉, 패턴을 그리거나 규칙을 탐색하는 과정에서 동일한 분할의 검색, 단계 중심의 산술적 관계 검색 등의 행동을 수행하면서 쓰기 영역과 제시된 패턴 사이의 주의 전환이 계속 이루어지는 것으로 해석할 수 있다.

모든 문제에서 공통적으로 기호적 일반화 문항에서의 전환횟수가 근 일반화나 원 일반화 문항보다 적었는데, 단계 간 총 전환횟수와 쓰기-단계 간 총 전환횟수가 모두 감소하였다. 이는 기호적 일반화 문항의 반응시간이 원 일반화 문항의 반응시간보다 짧은 것과 연결되는 결과이다. 대부분의 학생들이 원 일반화 문항에서 함수적 규칙을 일반화하고 기호적 일반화 문항에서는 식의 확장을 통해 일반식을 구하고 검토하기 때문에 AOI 간의 주의 전환 빈도가 감소하는 것으로 해석할 수 있다. 또한 문제1, 문제2, 문제4의 경우 근 일반화 문항의 전체 전환횟수가 원 일반화 문항의 전체 전환횟수보다 많았는데, 근 일반화 문항의 반응시간을

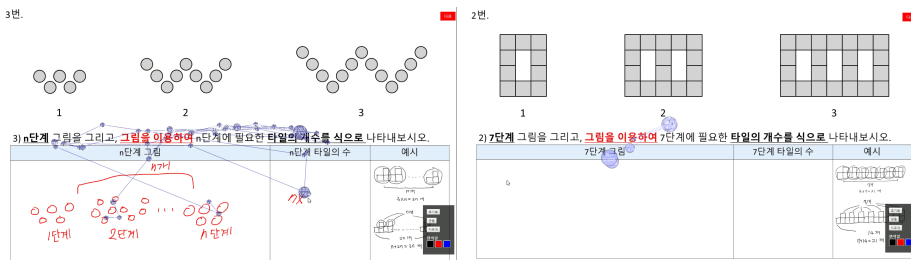
짧은 것을 감안했을 때, 시간당 전환횟수가 상대적으로 많다는 것을 알 수 있다. 원 일반화 문항보다 근 일반화 문항에서 단계 간 전환횟수의 총합이 더 높은 것을 보았을 때, 4단계에서 패턴을 특성과 성장방법을 파악하기 위해 단계 사이의 변화 검색을 하는 과정에서 단계 사이의 빠른 주의 전환이 일어나기 때문에 전체 전환횟수가 더 높게 나타나는 것으로 해석할 수 있다.

4.2. 시각적 주의와 내적 처리 과정

회상자극면담을 통해 파악한 결과 대부분의 패턴 일반화 과정에서 학생의 시각적 주의를 내적인 사고 과정과 관련이 있는 정보에 위치하였다. 즉, 대부분의 경우 Just & Carpenter(1980)의 눈-마음 가설이 성립하였다. 그러나 본 연구에서 다음과 같은 경우에는 내적인 과정과 시각적 주의가 일치하지 않았다.

- 1) 문제를 어떻게 해결할지 몰라서 방황하면서 이곳저곳을 응시하는 경우
- 2) 머릿속으로 암산하면서 화면에서 관계없는 위치를 응시하는 경우

예를 들어, [그림 IV-41.a]는 s9가 문제를 해결하다가 방황했을 때의 시선 흐름이다. 갑자기 문제의 문장을 자세히 읽는 것을 볼 수 있는데, s9는 이때 일반식을 어떻게 구해야할지 몰라서 방황하며 아무 곳이나 응시



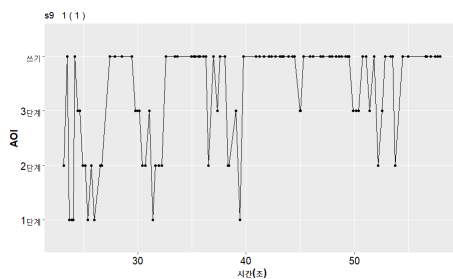
a. 방황할 때 s9의 안구 운동

b. s5가 머릿속으로 3, 5, 7, 9, 11을 했을 때의 응시

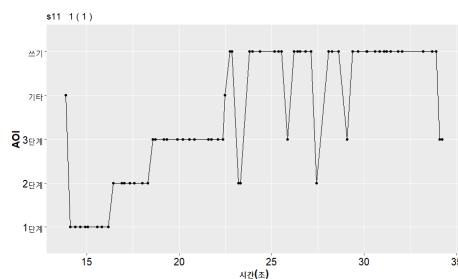
[그림 IV-41] 눈-마음 가설이 성립하지 않는 사례

다고 하였다. 즉, 시각적 주의는 문제의 문장에 있었지만 실제 내적 처리 과정과는 관계가 없었다. [그림 IV-41.b]는 s5가 7단계의 가로 길이를 구하기 위해서 머릿속으로 재귀적인 관계를 이용하여 수열 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15을 생각할 때의 안구 운동이다. 내적 처리 과정과는 관계없는 위치에 긴 응시들이 중복하여 나타난다는 것을 알 수 있다.

[그림 IV-42]는 문제1의 4단계를 동일하게 재귀적인 관계를 이용하여 그린 s9와 s11의 시간의 흐름에 따른 안구 운동의 AOI 이동 경로를 그래프로 나타낸 것이다. s9의 경우 1단계-2단계, 2단계-3단계를 비교하면서 재귀적 규칙을 파악한 후 2, 3단계를 참조하며 4단계를 그렸지만, s11의 경우 1단계의 전체를 관찰하고, 2단계의 전체를 관찰하고, 3단계의 전체를 관찰하면서 재귀적 규칙을 파악하고 다시 2단계나 3단계를 보면서 4단계를 그렸다. 두 학생은 모두 회상자극면담에서 재귀적인 관계를 이용하여 4단계를 그렸다고 보고하였는데 그들의 안구 운동 경로는 전혀 달랐다. 이는 다시 말하면, 단순히 안구 운동 패턴만으로는 학생의 일반화 접근 방식을 추론할 수 없음을 의미한다.



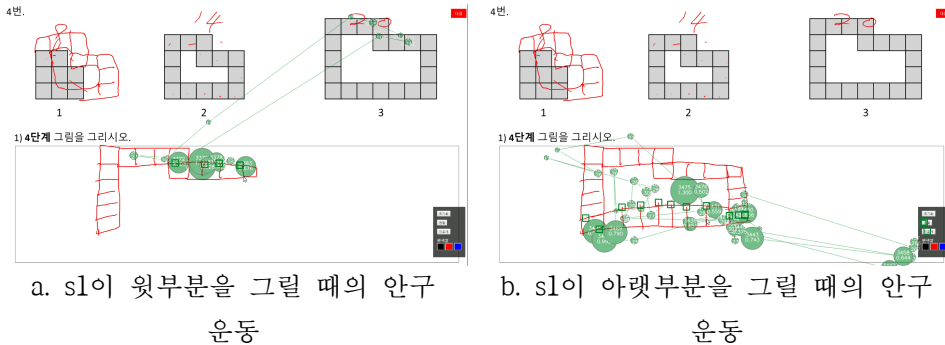
a. s9의 1(1)에서의 AOI 전환



b. s11의 1(1)에서의 AOI 전환

[그림 IV-42] 재귀적 접근을 한 s9와 s11의 AOI 전환 비교

그러나 많은 경우 문제 해결 진행 상황, 과제의 특성, 전후의 필기를 함께 고려하면 학생의 자기보고자료 없이 안구 운동 패턴으로도 내적 처리 과정을 추적할 수 있었다. 예를 들어 [그림 IV-43.a]은 안구 운동과 전후 상황으로 봤을 때 3단계에서 윗부분의 왼쪽과 오른쪽 부분이 동일하다는 반복성을 인식하고 그것을 이용하여 4단계를 그린 것으로 해석할



[그림 IV-43] 안구 운동 자료와 맥락 정보만으로 내적 과정의 추론이 가능한 경우와 그렇지 않은 경우

수 있었다. 실제로 회상자극면담에서 s1은 “위에 것이랑, 옆에 것이랑 똑같네? 해서 또 그리고..” 라고 언급하였다. 즉, 안구 운동 패턴에 대한 해석이 회상자극면담 내용의 결과와 일치하였다. 일반적으로 패턴의 타일의 수를 세거나([그림 IV-36.a] 참조) 머릿속으로 식에 숫자를 대입할 때([그림 IV-34] 참조)의 안구 운동 패턴은 상대적으로 명확하여 학생의 자기보고가 없더라도 정확하게 그 과정을 판별할 수 있었다.

그러나 종종 안구 운동 정보와 맥락 정보만으로는 정확하게 해석이 되지 않을 때도 있었다. 예를 들어 [그림 IV-43.b]는 4단계의 아랫부분을 그릴 때의 s1의 시선 흐름이고 다음은 이 장면과 관련된 회상자극면담 내용이다.

- s1: 밑에가 몇 개인지 알아야되니까..
 t: 이거는 위랑 맞추어서 한거야?
 s1: 아니요 센 거예요. 규칙을 찾았어요. 밑에 것도.
 t: (영상을 되돌리면서) 이거 밑에 칸 나눌 때는 위 보면서 한 것 아니야?
 s1: 아니예요. 최대한 위랑 맞추려고 하긴 했는데, 그래도 다시 세분거예요.
 t: 아 그럼 4단계일 땐 9개라는 것을 생각하고 한거야?
 s1: 네

s1이 윗부분을 응시하면서 아랫부분을 그렸기 때문에 연구자는 초기에

s1이 아랫부분의 규칙을 찾지 않고 그냥 윗부분에 맞추어서 경계를 나누는 것으로 해석하였다. 그러나 s1의 자기보고내용을 보면 s1은 마음속으로 4단계일 때 9개라는 함수적인 관계를 고려하면서 그림을 정확하게 그릴 목적으로 위를 응시한 것임을 알 수 있다. 따라서 안구 운동 패턴으로 내적 처리 과정을 정확히 알기 위해서는 회상자극면담과 같은 자기보고 자료와의 상호보완적 분석이 필요하다는 것을 다시 한번 확인할 수 있다. 그러나 학생들이 자신의 모든 안구 운동이 어떤 내적 처리 과정 중에 나타난 것인지 아는 것은 아니었다. 실제로 거의 모든 학생이 자신의 시선을 보면서도 당시에 무슨 생각을 하고 있었는지 모르겠다고 이야기 하는 순간이 있었다.

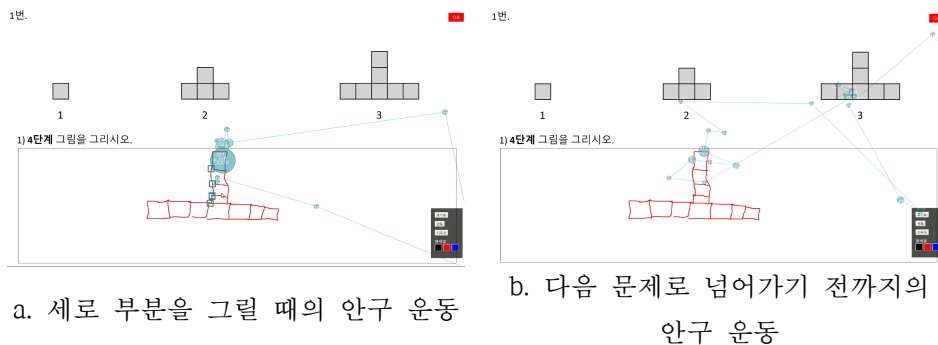
5. 오류의 유형과 원인

5.1. 근 일반화 문항에서의 오류 사례

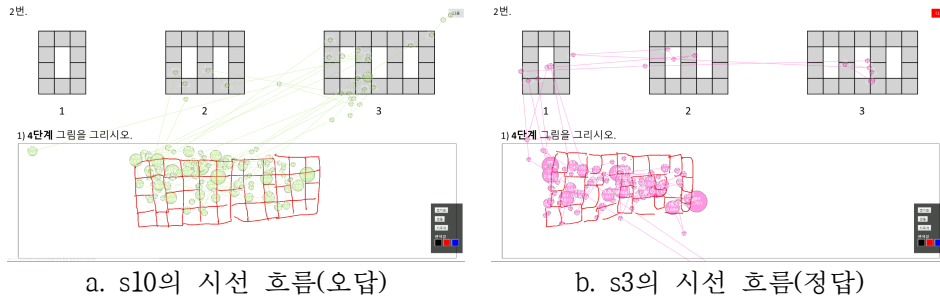
5.1.1. 재귀적 관계의 이해에서의 오류

재귀적인 관계를 이용하여 3단계로부터 4단계를 그리는 과정에서 오류가 발생한 경우이다. 예를 들어 s8의 경우 재귀적으로 문제1의 4단계를 확장하였는데 회상자극면담에 의하면 가로로 양옆에 1개씩 2개가 증가하므로 세로도 2개 증가한다고 생각하여 [그림 IV-44]와 같은 오류를 범하였다. s8은 초기에 가로 부분이 1씩 증가한다고 생각하여 4단계의 가로 부분을 6개로 그렸었는데, 정중앙에 타일을 정할 수 없다는 것을 깨닫고 홀수로 맞추기 위해 1개를 더 추가하였다. [그림 IV-44.a]은 그 이후에 s8이 세로 부분을 그릴 때의 안구 운동인데, 패턴을 보지 않은 상태에서 세로도 2개를 더 추가하여 그린 것을 볼 수 있다. [그림 IV-44.b]은 s8이 다음 문제로 넘어가기 직전 6초 동안의 안구 운동이다. 2단계와 3단계 4단계를 짧게 연속적으로 응시하는 패턴이 나타났지만 오류를 인식하지는 못하였다.

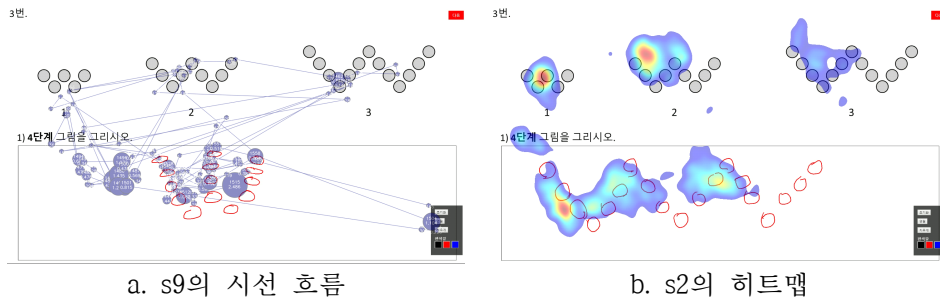
한편, 일부 학생들은 패턴의 재귀적인 규칙을 정확히 파악하지 못하고



[그림 IV-44] s8의 문제1의 근 일반화에서의 안구 운동



[그림 IV-45] 재귀적인 관계를 바르게 이해한 경우가 그렇지 않은 경우의 안구 운동 비교



[그림 IV-46] 왼쪽 첫 번째 V 부분에만 집중된 s2와 s9의 안구 운동

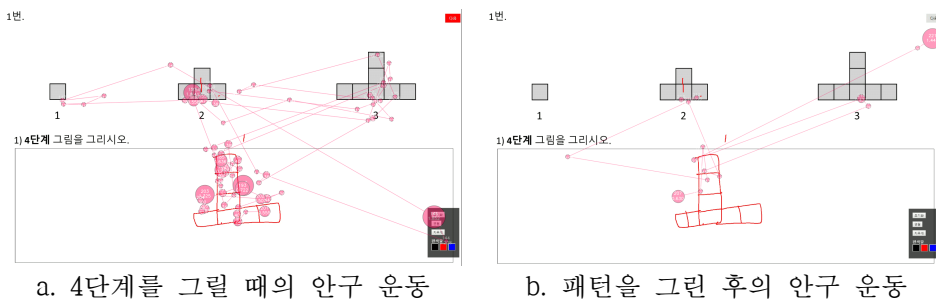
A, AA, AAA, ... 형태의 반복패턴으로 인식하는 경향을 보였다. 예를 들어, [그림 IV-45.a]에서 s10은 1단계를 4번 이어붙여 4단계를 그린다. [그림 IV-45.a]와 [그림 IV-45.b]는 각각 s10과 s3이 문제2의 4단계를 그릴 때의 시선 흐름 이미지이다. s10과 s3의 이 문항에 대한 반응시간은 40초 내외로 동일 했다. 재귀적인 규칙을 제대로 이해했던 s3와 다르게 s10의 시선 흐름에서는 패턴의 각 단계를 비교하는 횡적인 안구 운동 패턴이 관찰되지 않는다. 즉, s10은 패턴의 각 단계를 제대로 비교하지 않은 상태로 반복패턴이라고 가정하고 패턴을 확장한 것으로 보인다.

[그림 IV-46.a]에서 s9는 W패턴을 위쪽으로 3개씩 성장하는 것으로 이해하였고, [그림 IV-46.b]에서 s2는 W패턴을 오른쪽으로 V 형태로 추가되는 것으로 이해하였다. s9는 회상자극면담에서 “1단계에 어디에 붙이면(추가하면) 2단계가 되는지를 찾고 있다” 라고 이야기하였는데, s9는

$n-1$ 단계의 외곽에 물리적으로 타일을 추가하면 반드시 n 단계를 만들 수 있다고 생각하고 있음을 알 수 있다. 그러나 문제3과 문제4와 같이 $n-1$ 단계를 n 단계와 포개었을 때 포함되지 않는 패턴에서는 이러한 방법으로 다음 단계를 생성할 수 없다. 또한 [그림 IV-46]를 보면 이 두 사례의 시선 흐름은 패턴의 왼쪽 V 부분만을 응시하고 오른쪽 부분을 응시하지 않는다는 공통점을 갖는다. 따라서 반복패턴 꼴을 염두해둔 상태에서 패턴의 일부만을 관찰한 결과를 토대로 패턴을 확장한 것으로 판단된다.

5.1.2. 함수적 관계의 이해에서의 오류

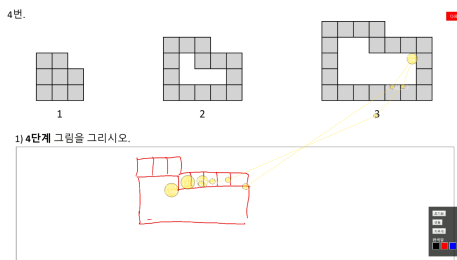
함수적 관계를 이용하여 4단계를 확장하다가 오류가 발생한 경우이다. [그림 IV-47.a]은 s14가 문제 1에서 4단계 패턴을 그릴 때까지의 시선 흐름이다. s14는 세로 부분의 타일이 단계의 수 만큼 있다는 것을 파악하고 그렸지만, 가로 부분에 대해서는 올바른 규칙을 찾지 못하였다. 시선 흐름을 보면 2단계에서는 중앙부분과 세로 부분을 집중적으로 보았고 3단계에서는 세로 부분만 보았을 뿐 양옆 가로 부분을 전혀 응시하지 않았음을 확인할 수 있다. 즉, 2단계와 3단계의 가로 부분을 확인하지 않았기 때문에 가로 부분의 변화를 정확히 파악하지 못한 것으로 볼 수 있다. [그림 IV-47.b]는 그림을 다 그리고 난 후부터 다음 문제로 넘어가기 전까지의 s14의 시선 흐름이다. 자신이 확장한 4단계의 가로 부분을 확인하는 응시가 없음을 알 수 있다. s14는 귀납적 검증을 하지 않았기 때



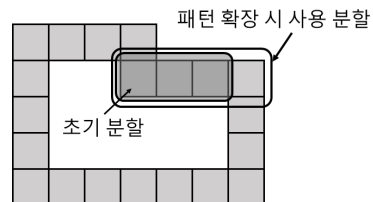
[그림 IV-47] s14의 문제1의 근 일반화에서의 오류

문에 오류를 발견하거나 수정할 수 없었다.

s4는 문제4에서 변마다 단계의 수와의 함수적 관계를 고려하여 4단계를 그렸다. 그 과정에서 윗변의 오른쪽 부분을 1개 더 그리게 된다. [그림 IV-48.a]는 s4가 오른쪽 윗부분을 그릴 때의 안구 운동이다. 그림에서 볼 수 있듯이 s4는 가운데 하얀 부분을 그리고 테두리에 타일을 붙이는 방식으로 4단계를 확장하였다. 즉, s4의 초기 분할은 [그림 IV-48.b]에 표시된 것처럼 오른쪽 부분을 제외한 3개의 타일에 해당하는 것이었다. 따라서 s4는 3개의 타일을 보면서 단계의 수만큼 있다라는 추론을 통해 자신의 패턴을 확장해야 한다. 그러나 s4는 패턴을 확장하는 과정에서 오른쪽 부분을 포함하는 4개의 타일의 분할을 보면서 단계의 수보다 1개 많다는 관계를 이용해서 5개의 타일을 그리게 된다. 즉, 이러한 오류는 패턴에 대한 분할 기준을 일정하게 유지하지 못하면서 발생하는 오류로 볼 수 있다. s4 역시 귀납적인 점점의 과정을 거치지 않고 이대로 다음 문항으로 넘어갔다.



a. s4가 윗부분을 그릴 때의 안구 운동

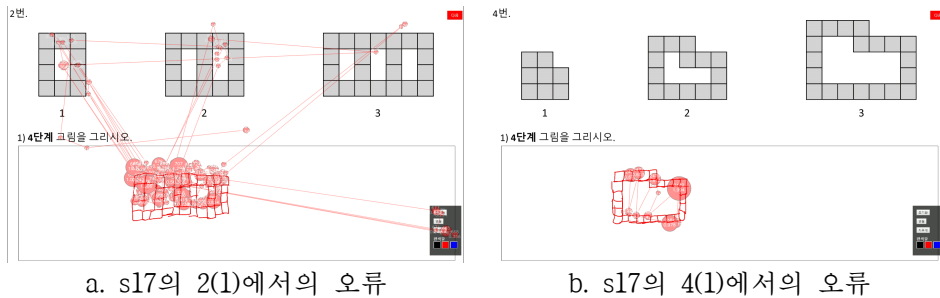


b. s4의 분할 기준의 변화

[그림 IV-48] 잘못된 분할의 참조로 인한 오류 사례

5.1.3. 패턴을 그리는 절차상의 오류

일부 학생들은 패턴의 재귀적 관계나 함수적 관계에 대해 바르게 이해하거나 패턴을 확장하는 적절한 일반화 행동을 시도했음에도 불구하고 그림을 그리는 과정에서 오류를 범하였다.



a. s17의 2(1)에서의 오류

b. s17의 4(1)에서의 오류

[그림 IV-49] 패턴을 그리는 절차에서의 오류 사례

[그림 IV-49.a]에서 s17은 4단계를 그려야 하는데 5단계를 그렸다. s17은 회상자극면담에서 창문의 개수가 단계의 수만큼 있다는 것을 이해하고 있다고 보고하였다. 실제로 s17은 이 패턴의 원 일반화 문제와 기호적 일반화 문제를 모두 잘 해결하였다. 면담에서 s17은 머릿속으로는 분명 가운데 하얀 부분이 4개가 되도록 그리자고 생각했는데, 왜 5개까지 그렸는지 모르겠다고 대답하였다. [그림 IV-49.a]는 s17이 패턴을 확장하는 과정 전체에 대한 시선 흐름이다. 초기에 하얀 부분이 1개씩 늘어나는 것을 관찰하는 안구 운동 패턴이 있으며, 1단계와 2단계를 참조하며 패턴을 확장하는 안구 운동이 존재한다. 그러나 최종적으로 확장된 패턴의 타당성을 검증하는 안구 운동은 보이지 않았다. s17은 문제4에 대해서도 유사한 오류를 보였다. s17은 2씩 증가하는 아랫변의 규칙을 찾는데 어려움을 느끼고 일단 [그림 IV-49.b]와 같이 윗변에 맞춰서 아랫변을 완성하고자 하였다. 이는 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용하여 패턴을 확장하는 유효한 일반화 행동임에도 불구하고 절차상의 실수로 타일을 1개를 더 그리면서 오류가 발생하였다.

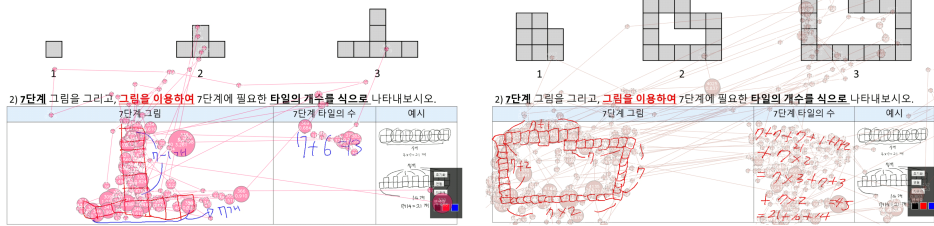
5.2. 원 일반화 문항에서의 오류 사례

5.2.1. 함수적 관계의 이해에서의 오류

원 일반화 문항에서도 패턴의 특정 분할의 함수적 관계를 잘못 이해하

1번.

4번.



a. s14의 문제1의 7단계

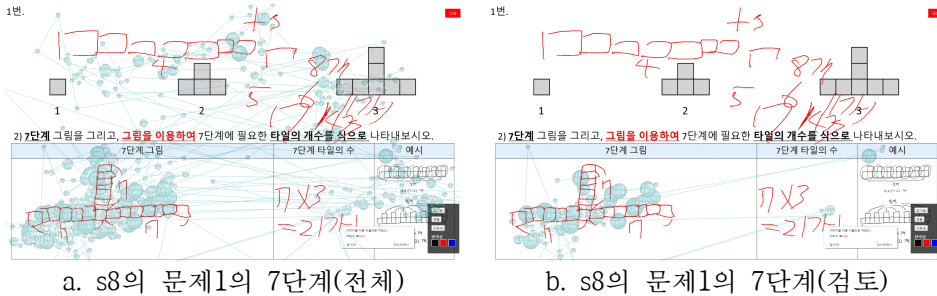
b. s6의 문제4의 7단계

[그림 IV-50] 원 일반화 단계에서 함수적 관계의 이해의 오류 사례

는 경우가 있었다. s14의 경우 [그림 IV-50.a]와 같이 패턴의 세로 부분은 바르게 규칙을 세웠지만 가로 부분도 n 개가 있는 것으로 파악하였다. 시선 흐름을 보면 2단계와 3단계의 가로 부분에 대한 응시가 거의 없는 것을 알 수 있다. 그러나 이러한 가추는 4단계로부터 확장된 것이라고 볼 수 없다. s14는 [그림 IV-47.b]에서 볼 수 있듯이 4단계에서는 가로의 타일을 5개로 그렸기 때문이다. 자세한 관찰 없이 가로 부분과 세로 부분의 길이가 동일하다는 관계를 확정한 상태에서 그림을 그린 것으로 판단된다. s6의 경우 [그림 IV-50.b]에서 볼 수 있듯이 동일 분할의 검색을 통해 패턴의 각 변에 대한 함수적 관계를 찾아가며 7단계를 그렸지만 윗변의 왼쪽, 아랫변, 왼쪽 변 등이 모두 오류가 있었다. s6가 잘못된 함수적 관계를 가추하게 된 원인은 [그림 IV-48]의 사례와 동일하게 패턴의 분할을 정확히 참조하지 못한 것이다. 예를 들어 3단계에서 왼쪽 윗변 4개를 보고 $3+1$ (단계의 수+1)을 가추하여 자신의 7단계를 그렸는데 왼쪽 1개의 타일을 제외하고 $7+1$ 로 적용하였기 때문에 오류가 발생하였다. 즉, 함수적 관계의 이해에서의 오류는 대부분 패턴의 분할 기준을 동일하게 유지하지 못하는 것으로부터 기인했다.

5.2.2. 수치 중심적 과정에서의 오류

s8은 문제1에서 패턴의 밑변이 2씩 증가한다는 재귀적인 관계를 이용하여 먼저 7단계 밑변의 개수를 수치적으로 구하였다. 그런데 그 과정에서 $7(4\text{단계}) \rightarrow 9(5\text{단계}) \rightarrow 11(6\text{단계}) \rightarrow 14(7\text{단계})$ 로 6단계에서 7단계로 넘어



[그림 IV-51] s8의 수치 중심적 일반화의 오류 사례

갈 때 계산 실수를 하게 된다. s8은 14개를 그린 후, 적당히 중앙 부분을 선택하여 동일 관계의 검색을 이용하여 오른쪽 부분과 동일하게 7개를 위로 그린다. 그리고 자신이 그린 7단계의 타일의 수를 세어 21개를 적는다. 다음 문제로 넘어가기 전 s8의 검토는 자신이 그린 그림의 타일의 수가 21개가 맞는지를 확인하는 것이었다. [그림 IV-51.a]를 보면 수치계산을 위해 응시한 부분들을 제외하면 패턴에 대해 응시한 것이 거의 없음을 알 수 있다. [그림 IV-51.b]의 마지막 검토 과정에서 제시된 패턴과 자신이 그린 패턴의 동일 분할에 대해 동일한 관계가 성립하는지 여부 등을 확인하는 귀납적 과정이 없고, 자신이 그린 그림의 타일의 수를 정확히 세었지만 확인한다. 수치 중심의 일반화에서 산술적인 계산이 틀리면서 잘못된 일반화를 한 것으로 볼 수 있다.

한편, 다음은 s9의 문제1의 7단계에 대한 회상자극면담 내용이다.

s9: 7개잖아요. 숫자(단계)가 늘어날수록 3개가 늘어나니까 $3n$ 이라고 했어요.

t: 왜 숫자부터 쓰고 그림을 그렸어?

s9: 그게 편해서요.

.....

t: 음 이게 어떻게 그리는거야? 예를 들어 4단계면?

s9: 4단계면 여기(3단계)에 하나, 둘, 셋 더 붙고

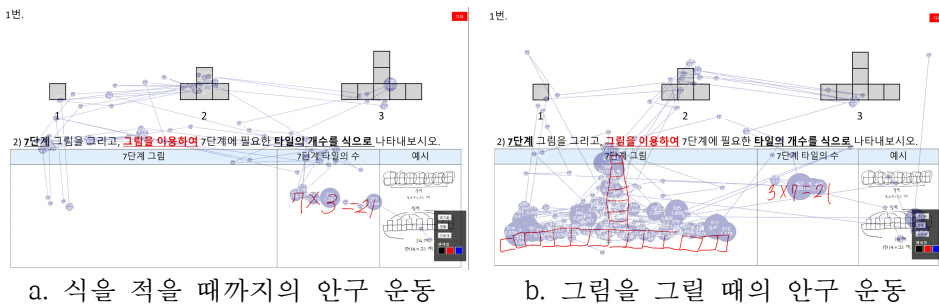
t: 5단계면?

s9: 하나 더 붙고

t: 아 그러면 이걸 머릿속으로 그린 거야?

s9: 네, 근데 개수가 많아서(웃음) 21개인데 양옆에 하나씩 붙여보자 이러면
 너무 오래걸릴 것 같아서, 적당히 그린 다음에 21개 되도록 맞추자.
 t: 아 그래서 지금 이게 세는거구나. 세어보니깐 19개라서 2개 더 그려야
 된다 그래서 양옆에 2개 추가?
 s9: 네

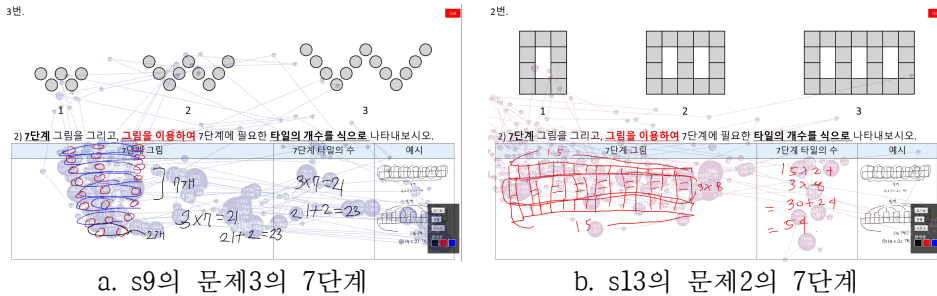
s9의 경우 초기 관찰을 통해 타일의 수가 3개씩 증가한다는 것을 발견
 하고 [그림 IV-52.a]와 같이 $3 \times 7 = 21$ 으로 개수를 먼저 썼다. 이는 차이
 전략에 해당하는 오개념이다. s9는 몇 번의 수정을 하였지만 다시 최종
 적으로 식을 $7 \times 3 = 21$ 으로 적었다. 이후 s9는 재귀적으로 3단계를 이용
 하여 세 방향으로 1개씩 붙여가면서 7단계를 그리려 했으나 21개가 너무
 많다고 생각해서 그림을 대략적으로 그린 다음 반복적으로 세면서 21개
 가 될 때까지 타일을 추가하였다. 패턴의 구조보다는 21개라는 수치에
 초점을 맞추었기 때문에 [그림 IV-52.b]와 같이 세 방향의 타일의 개수가
 다른 7단계를 구성하게 되었다.



[그림 IV-52] s9의 수치 중심적 일반화의 오류 사례

5.2.3. 패턴을 그리는 방법의 확장에 의한 오류

일반화 행동 중 패턴을 그리는 방법의 확장과 관련된 오류이다. 근 일
 반화 문항에서 4단계를 정확히 확장하지 못한 학생들 중 일부는 동일한
 규칙을 그대로 적용하여 7단계 패턴을 그리고, 타일의 개수를 세는 경
 우가 있었다. 예를 들어, s9의 경우 [그림 IV-46.a]에서 4단계를 그릴 때 사



[그림 IV-53] 잘못된 규칙을 이용하여 패턴을 확장한 사례

용했던 규칙을 그대로 이용하여 [그림 IV-53.a]와 같이 7단계를 그렸다. 시선 흐름 이미지를 살펴보면 사이 사이에 패턴을 보는 아주 짧은 응시가 있을 뿐 패턴의 규칙성을 새롭게 탐색하거나 자신의 패턴과 주어진 패턴을 비교하는 움직임도 없다.

s13의 경우도 문제2의 4단계에서 세로 기둥을 4개가 아닌 5개로 그렸고, 7단계에서도 동일한 방식으로 패턴을 그렸다. 7단계를 그리고 식을 세우는 전체 시선 흐름 [그림 IV-53.b]을 살펴보면, 패턴을 거의 응시하지 않았음을 알 수 있다. s13은 패턴 일반화 역량이 우수한 학생 중 하나인데, 회상자극면담에서 자신의 규칙이 당연히 맞다고 생각했기 때문에 기둥 부분을 확인할 생각을 하지 못했다고 하였다. 즉, 학생들은 4단계에서 이미 규칙을 정확히 파악했다고 생각하는 경우 이를 그대로 7단계에 적용하는 경향이 있었는데, 4단계 확장에 오류가 있는 경우 그대로 7단계 확장의 오류로 이어졌다.

5.2.4. 산술적으로 표현하는 과정에서의 오류

몇몇 학생들은 7단계 그림을 정확하게 그렸음에도 불구하고 7단계 타일의 수를 구하는 산술적 식을 정확하게 구하지 못하였다. 예를 들어, 다음은 문제3의 7단계에 대한 s14의 회상자극면담 내용이다.

t: 뭐하는거야 왜 다시 패턴을 봐?

s14: 규칙 찾고 있어요.

t: 규칙? 규칙 이미 알았자나? 8 8 8 8

s14: 아 이 8 8 8 8 이요? 근데 여기서 그래서 그걸 찾고 있어요.

t: 아 8 8 8 8 은 아직은 못 찾은거였어?

s14: 아 그러니까, 그게 그냥 단계보다 1개 많은게 W 모양이다 생각해서 그
리고

t: 그렇지 단계보다 하나 더 많은게 W 모양이라는 이미 알고 있는 상태인
거지?

s14: 네, 근데 그걸 어떻게 쓸지? 찾고 있어요.

t: 어떻게 쓸지?

s14: 규칙

t: 규칙을? 근데 이게 그 규칙 아니야? 하여튼 암튼 뭘 파악하고 있는건지
알려줘

s14: 여기서는 뭔가 방황하다가... 이것도 아니었어요.

(중략)

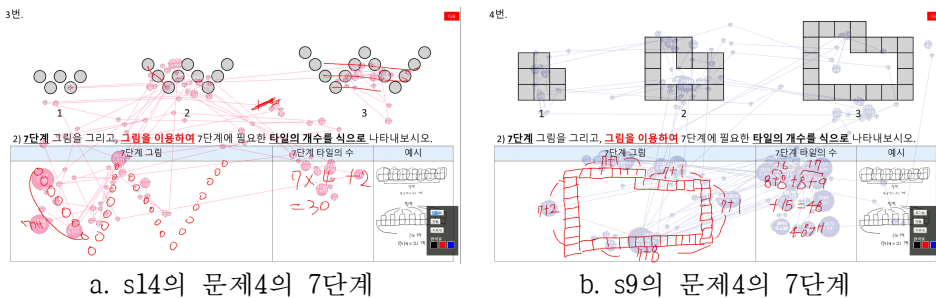
t: 8 8 8 8 하고 겹치는거 빼면 되는데 그건 생각안했어?

s14: 네, 겹치는거 처리하기가 어려워서

t: 아 그럼 안겹치게 계속 분해한거야?

s14: 네

대화에서 볼 수 있듯이 s14는 이미 단계의 수보다 1개 많은 변이 W모
양을 이루고 있다는 상황적 규칙을 파악하고 이를 이용하여 7단계를 빠
르게 그렸음에도 불구하고 타일의 수를 나타내는 식을 쓰는 것을 어려워
했다. [그림 IV-54.a]는 s14가 7단계 패턴을 그린 후부터 식을 쓸 때까지



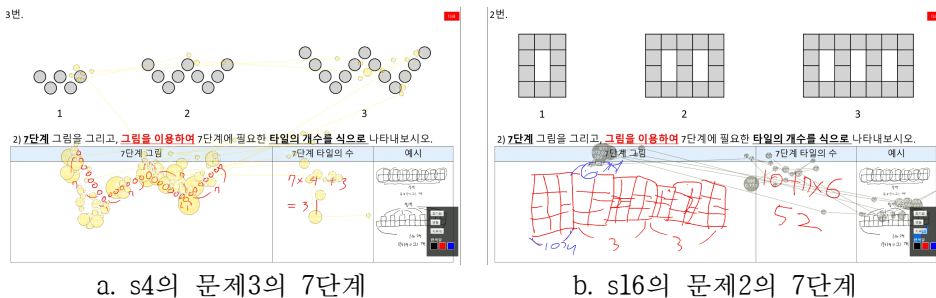
[그림 IV-54] 겹치는 부분을 처리하는 과정에서의 오류 사례

40초 동안의 시선 흐름이다. s14가 새롭게 패턴을 분할하려고 패턴을 관찰하면서 다양한 시도를 하였음을 확인할 수 있다. 회상자극면담에 의하면 s14는 겹치는 부분을 처리하기 어려워서 겹치지 않게 패턴을 분할하는 방법을 찾았다고 한다. s14는 겹치지 않게 7을 이용하여 식을 세웠으나 가운데 상단의 겹치는 타일을 제대로 고려하지 못해 결국 잘못된 식을 세우게 되었다.

이와 같이 학생들은 겹치는 부분과 관련된 계산에서 어려움을 겪었다. 예를 들어, [그림 IV-54.b]에서 s9의 경우도 7단계를 정확히 그리고 각 변의 길이도 $7+k$ 꼴로 잘 표현하였지만 겹치는 꼭짓점을 고려하지 못하여 타일의 수를 제대로 구하지 못하였다.

[그림 IV-55.a]에서 s4 역시 단계보다 1개 많은 것이 W 모양으로 있기를 이용하여 7단계를 제대로 그렸다. 그러나 패턴을 분할하고 7을 이용하여 식으로 나타내는 과정에서 가운데에 6인 분할을 7로 생각하면서 정답인 29가 아닌 31을 얻었다. 이러한 경우 분할의 함수적 관계를 제대로 이해하지 못한 것으로 볼 수 있다. [그림 IV-55.b]의 s16의 사례를 보면, 7단계 그림을 정확히 그리고 그림에 모든 구조의 개수를 정확히 표시했음에도 불구하고 잘못된 식을 적었다. 1단계와 6개의 ‘ㄷ’으로 분할하는 방법과 4개의 타일과 7개의 ‘ㄷ’으로 분할하는 방법이 섞이면서 잘못된 식이 도출되었다. 이러한 사례 역시 패턴에 대한 분할을 일정하게 유지하지 못함으로써 발생하는 오류로 볼 수 있다.

이러한 사례는 7단계 패턴을 상황적으로 그릴 수 있는 것이 대수적으



[그림 IV-55] 패턴의 분할과 관련된 오류 사례

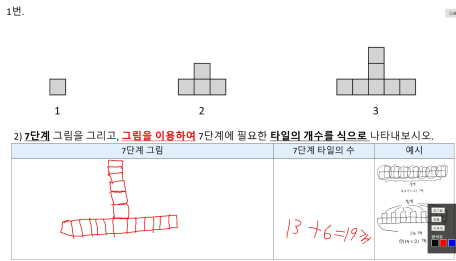
로 유의미한 방법으로 타일을 셀 수 있음을 의미하는 것이 아니라는 것을 보여준다. 연구자나 교사는 “8개씩 W 모양을 이루고 있다”를 이해하고 패턴을 그린 학생은 타일의 수를 어렵지 않게 도출할 수 있을 것으로 생각하지만 실제로 많은 학생들이 이러한 과정에서 어려움을 겪었다. 또 어려움의 원인 중에는 패턴의 분할에 관한 문제와 겹치는 타일의 수를 처리하는 계산 도식의 부재가 있음을 알 수 있었다. 학생들의 이러한 오류는 단순히 타일의 개수를 정확히 세지 못하는 문제라기보다는 단계의 수 7을 이용하여 일반식으로의 확장이 용이한 형태로 패턴을 분할하고 식을 표현하는 과정에서 발생하는 것으로 볼 수 있다.

5.3. 기호적 일반화 과정에서의 오류 사례

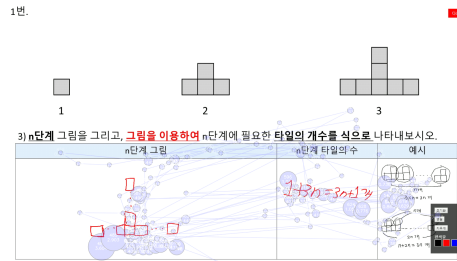
5.3.1. 함수적 관계의 이해에서의 오류

몇몇 학생들은 7단계에서 함수적인 관계를 이용하여 패턴을 그리고 타일의 수를 정확히 세었음에도 불구하고 n 단계에서 잘못된 일반화를 하였다. 예를 들어, s5는 [그림 IV-56.a]와 같이 문제1의 7단계를 바르게 일반화하였다. 회상자극면담에서 s5는 가운데를 포함해서 세 방향으로 7칸씩 있는 것을 이해했다고 이야기하였다. 그러나 n 단계를 일반화할 때는 가운데를 제외하고 세 방향으로 n 개씩 있다고 생각하여 $1+3n$ 으로 일반식을 구하였다. [그림 IV-56.b]의 전체 시선 흐름을 보면 1, 2, 3단계를 전혀 보지 않은 것을 알 수 있는데, 머릿속으로 생각하여 그리다가 가운데 포함 세 방향이 아닌 가운데를 제외한 세 방향으로 n 개씩으로 판단한 것으로 보인다. 이러한 것 역시 패턴의 분할의 관점에서 설명할 수 있는데, 가운데를 포함한 분할에서 구한 7단계의 규칙을 n 단계에서는 가운데 타일을 제외하고 적용하면서 발생한 오류로 볼 수 있다.

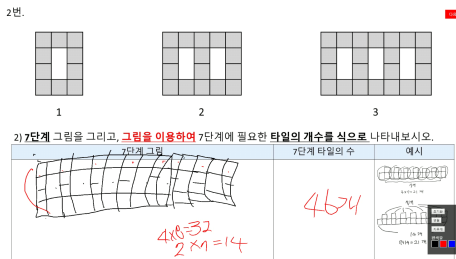
예를 들어, s7의 경우 [그림 IV-56.c]에서 볼 수 있듯이 문제2의 7단계를 4개의 타일로 구성된 기둥 8개와 2개의 타일로 구성된 기둥 7개로 바르게 세었다. 그러나 s7은 n 단계에서 새롭게 패턴을 관찰하며 새로운 규



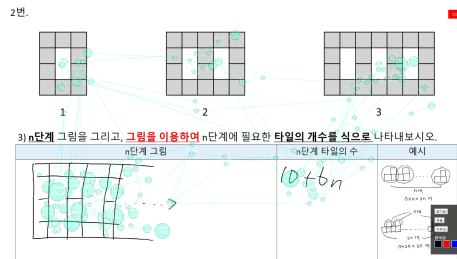
a. s5의 문제1의 7단계 일반화



b. s5의 문제1의 n단계 일반화



c. s7의 문제2의 7단계 일반화



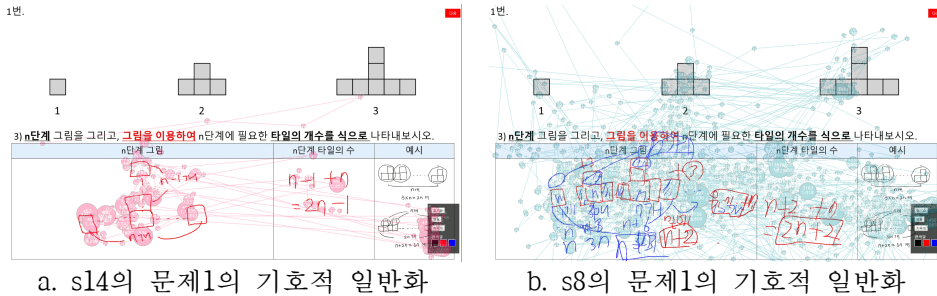
d. s7의 문제2의 n단계 일반화

[그림 IV-56] 기호적 일반화 단계에서 함수적 관계의 이해 오류 사례

칙을 찾았는데, [그림 IV-56.d]에서 볼 수 있듯이 1단계, 2단계, 3단계에서 ‘ㄷ’ 모양이 추가되는 구조를 발견하였다. 그런데 n단계에 ‘ㄷ’ 모양이 $n-1$ 개가 아닌 n 개 있는 것으로 이해하여 틀리게 된다.

5.3.2. 식의 확장에 의한 오류

식의 확장 행동과 관련된 오류로 [그림 IV-32]에서 보았듯이 정확히 구하지 못한 7단계의 식을 확장하여 일반식을 구하는 것이다. s14는 [그림 IV-50.a]에서 보았듯이 문제1에서 가로 부분의 함수적 관계를 잘못 이해한 결과 $6+7$ 로 일반화를 하였다. [그림 IV-57.a]를 보면 그림을 ...을 이용하여 전체적인 윤곽만 표현한 후 7단계에서 썼던 $7-1$ 과 7 을 그대로 $n-1$ 과 n 으로 확장한 후 일반식을 $2n-1$ 로 쓰는 것을 볼 수 있다. 전체 시선 흐름을 보면 패턴을 제대로 응시한 흔적이 없는 것을 보아 귀납적 검증이 이루어지지 않았음을 알 수 있다.



[그림 IV-57] 식의 확장, 문자의 의미를 이해하지 못하는 오류 사례

5.3.3. 일반성의 표현에서의 오류

s8은 재귀적인 방법과 시행착오적인 추측과 확인의 반복을 통해 문제 2, 문제3, 문제4의 근 일반화와 원 일반화를 바르게 구하였다. 그러나 문자 n 의 의미를 이해하지 못하여 n 단계의 타일의 수를 n 에 대한 일반식으로 표현하지 못하였다. 다음은 s8의 기호적 일반화 단계에 대한 회상 자극면담 내용이다.

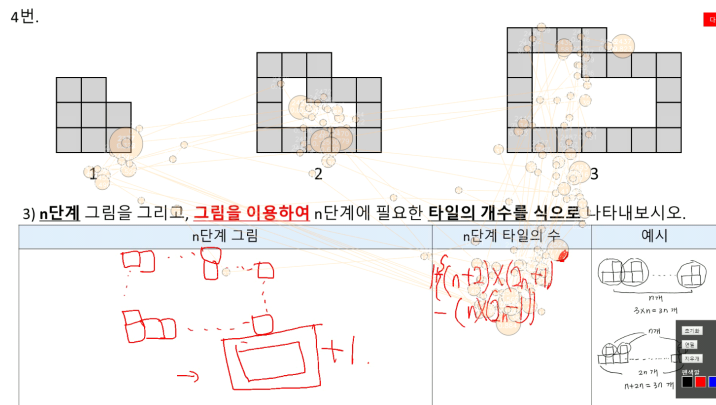
- t: 자 영상을 보면서 이야기하자
- s8: 하나, 둘, 세 개 이렇게 세 개씩 붙었요.
- t: 아 그걸 그림에 표시한 거구나
- s8: 그런데 n 으로 이걸 어떻게 표현할지 몰라가지고..
- t: 내가 n 단계만 그리라고 했는데 왜 이렇게 그렸어?
- s8: n 단계를 어떻게 그릴지 모르겠어서
- t: 그래서 이렇게 ...을 이용해서 그리고, 이제 모하는거야?
- s8: 식 세우는거예요. 근데 식을 어떻게 세워야할지..
-(중략).....
- t: $n+2$ 는 어떻게 나온거야?
- s8: 아 이거 하나(1단계)를 n 으로 봤어요. 밑에를 $n+2$ 로 했어요. 2개씩 양 옆으로 붙으니까

s8은 [그림 IV-57.b]에서 볼 수 있듯이 10분의 고민 끝에 1단계에 있는

타일을 n 으로 보고 가로로 2개씩 늘어나기 때문에 가로 부분을 $n+2$ 로 표현하였다. 즉, 문자 n 을 1단계에 있는 특정한 타일을 나타내는 기호로 사용하였다. 또 위로 1개씩 길어지는 부분도 n 이라 표현했다. 그 결과 $n+2+n=2n+2$ 라는 일반식이 도출되었다. s8은 문자 n 의 의미를 이해하지 못하였기 때문에 자신의 식을 주어진 패턴을 이용하여 검증할 수도 없었다. s8은 회상자극면담 후반부의 인터뷰에서 중학교 2학년과 3학년 1학기까지의 학교 정기고사의 성취도가 모두 A라고 대답하였다. s8은 변수를 이용하여 일차함수 문제를 풀 수 있고, 일차방정식도 풀 수 있음에도 불구하고 변수 n 을 이용하여 n 번째 그림을 표현하거나 n 단계의 타일의 수를 나타내는 법을 알지 못하였다.

5.3.4. 변환 과정에서의 오류

s15는 문제4에서 패턴의 물리적 구조를 변환한 후 넓이를 이용하여 n 단계 타일의 수를 세고자 하였다. 그러나 변환 과정에서 [그림 IV-58]과 같이 직사각형을 만들고 1개의 타일이 더 남는 것으로 잘못 생각하여 1이 더 많은 일반식을 구하게 되었다. s15의 방법은 타당한 것이었으나 시각적 변환 과정에서의 오류로 올바른 일반식을 구하지 못하였다.



[그림 IV-58] s15의 변환 과정에서의 오류 사례

5.4. 오류의 경로 및 원인

18명의 총 216건의 사례 중 오답은 54건이었다. 사소한 계산 실수는 정답으로 인정하였다. 오류의 유형에 따른 사례 수를 정리하면 <표 IV-11>과 같다.

근 일반화 문항에서는 패턴의 함수적 관계나 재귀적 관계를 정확히 파악하지 못하는 경우가 대부분의 오류를 차지하였고 일부 사례는 관계를 정확히 이해했음에도 불구하고 그림을 잘못 그리는 경우가 있었다.

원 일반화 문항에서는 7단계 패턴을 정확히 그렸음에도 불구하고 7단계의 타일의 수를 정확히 계산하지 못한 사례가 가장 많았다. 그런데 이는 앞에서 살펴보았듯이 계산 실수의 측면보다는 단계의 수 7을 이용하여 일반식으로 확장이 용이한 형태로 자신이 그린 그림을 분할하고 식으로 표현하는 과정에서 나타나는 오류라 할 수 있다. 특히 학생들은 패턴의 분할과 겹치는 부분의 처리에 있어서 많은 오류를 범하였다. 패턴을 상황적으로 그릴 수 있다고 해서 반드시 대수적으로 유용한 식으로 표현할 수 있는 것은 아님을 알 수 있다.

<표 IV-11> 오류의 유형별 사례 수

오류의 유형	사례 수
-근 일반화(4단계)	15
함수적 관계의 이해에서의 오류	7
재귀적 관계의 이해에서의 오류	5
패턴을 그리는 절차상의 오류	3
-원 일반화(7단계)	20
산술적으로 표현하는 과정에서의 오류	8
함수적 관계의 이해에서의 오류	4
패턴을 그리는 방법의 확장에 의한 오류	4
수치 중심적 과정에서의 오류	4
-기호적 일반화(n 단계)	19
식의 확장에 의한 오류	8
함수적 관계의 이해에서의 오류	6
일반성의 표현에서의 오류	4
변환 과정에서의 오류	1

〈표 IV-12〉 잘못된 일반식이 도출되는 경로의 분류

오류의 경로			사례수	비고
4단계	7단계	n 단계		
○	이해의 오류	식의 확장	2	
○	수치 중심 오류	식의 확장	1	
○	산술 표현 오류	식의 확장	1	
이해의 오류	이해의 오류	식의 확장	1	
이해의 오류	패턴의 확장	식의 확장	3	
○	○	이해의 오류	3	
○	산술 표현 오류	이해의 오류	1	
이해의 오류	패턴의 확장	이해의 오류	1	
이해의 오류	이해의 오류	이해의 오류	1	
○	산술 표현 오류	변환 오류	1	
이해의 오류	수치 중심 오류	일반성 표현 오류	1	s8 한명의 사례
○	○	일반성 표현 오류	3	

※ ○는 옳게 수행했음을 의미

기호적 일반화 문항에서는 식의 확장으로 인한 오류가 가장 많았다. 〈표 IV-12〉는 기호적 일반화 단계의 오류 사례 19건의 오류 경로를 분류한 것인데, 실제로 원 일반화 문항에서 잘못된 관계의 이해 또는 산술적으로 표현하는 과정에서의 오류에 의한 잘못된 식을 그대로 n 단계로 확장한 후 귀납의 과정을 거치지 않는 경우가 총 8건으로 가장 많았다. 귀납적인 검증의 과정이 없었기 때문에 이러한 오류가 수정되지 않았다. 충분한 가추-귀납적 순환 과정을 거치지 않은 불확실한 규칙을 확장하는 일반화 행동은 오류로 이어질 가능성이 높다고 볼 수 있다. 또 6건은 7단계까지는 재귀적인 관계로 그림을 그리고 타일의 수를 세다가 마지막에 함수적 관계를 잘못 구하거나 새롭게 일반화 방법을 바꾸다가 실수하는 경우였다. 문자 n 에 대한 이해 부족은 4건이 있으나 s8 한 명에 대한 사례이다.

한편, 오류 사례에 대한 분석을 토대로 도형 패턴의 일반화에서 학생들이 잘못된 일반화를 하게 되는 인지적 원인을 다음과 같이 6가지로 도출할 수 있었다.

- 패턴의 물리적 구조에 대한 부정확한 지각
- 일관성 없는 패턴의 분할의 사용
- 포함-배제 원리 도식의 부재
- 패턴과 단절된 규칙의 확장
- 변수 개념에 대한 이해의 부족
- 귀납적 검증의 미 실시

패턴의 일부분만 관찰하거나 단계 사이의 변화 검색을 충분히 실시하지 않은 경우 패턴의 공통적인 특성이나 변화하고 유지하는 부분을 정확하지 않게 이해하지 못하게 되고 이는 도형 패턴에 내재된 재귀적, 함수적 관계에 대한 잘못된 이해로 연결되었다. 일반화 과정에서 핵심이라고 할 수 있는 함수적 관계의 이해에 관한 오류의 대부분은 패턴의 분할에 대한 기준을 일정하게 유지하지 못함으로써 발생하였다. 예를 들어, 단계 중심의 산술적 관계 검색에서 정확히 대응되는 분할들을 사용하지 못하면서 잘못된 함수적 규칙이 도출되었다. 기하적 변환을 시도하거나 패턴 내 요소 사이의 대응 관계를 수립할 때에도 잘못된 분할의 사용으로 인한 오류가 발생함을 확인할 수 있었다. 중학교 3학년인 연구 참여자 중 일부는 포함-배제 원리, 즉 겹치는 부분을 처리하는 도식을 가지고 있지 않았다. 이러한 학생들은 겹치는 분할의 함수적 규칙을 통합하여 하나의 일반식을 도출하는 과정에서 오류를 범하거나, 분할을 겹치지 않게 조정하다가 오류를 범하는 경우가 많았다. 학생들은 충분한 검증을 거치지 않은 패턴과 단절된 규칙의 적용 범위를 확장하는 행동을 하는 경향이 있었다. 4단계를 그리는 잘못된 방법을 그대로 7단계에 적용하거나 잘못된 7단계의 산술적 식을 일반식으로 확장하면서 잘못된 일반화로 이어졌다. 또 변수 개념에 대한 이해가 부족한 학생은 7단계에서 함수적 구조를 파악했음에도 불구하고 n 단계의 타일의 수를 변수 n 을 이용한 일반식으로 나타내지 못하였다. 이러한 모든 오류는 귀납적 검증 단계를 통해 발견되고 수정될 수 있음에도 불구하고 오류를 범한 학생들은 대부분 귀납의 과정을 실행하지 않았다. 반면, 귀납적 검증을 실시하는 학생들

은 잠정적으로 오류가 있는 규칙을 가추하더라도 반성의 과정을 통해 오류를 인지하고 새로운 규칙을 가추할 수 있었고, 이러한 가추-귀납 단계의 순환을 통해 일반화에 성공할 수 있었다.

6. 요약 및 논의

시선 흐름 영상과 회상자극면담 자료에 대한 질적분석과 안구 운동 자료에 대한 양적 분석을 토대로 도형 패턴 일반화 과정에서 중학생의 시각적 추론의 양상과 일반화 행동, 오류의 유형 및 원인에 대해 분석하였다.

6.1. 패턴 일반화 수행 내용

본 연구에 참여한 중학교 3학년 중상위권 학생들의 선형 패턴 일반화 과제의 정답률은 75.00%였다. 문제1, 문제2, 문제4는 18명 중 5명이 일반화를 하지 못하였으며, 문제3은 4명이 일반화를 하지 못하였다. 학년이 상승함에 따라 일반화 능력이 향상된다는 것을 고려했을 때(Jurdak & El Mouhayar, 2014), 이는 선행연구에서 문자와 식을 배운 중학교 1학년의 정답률 60%(정홍춘, 이경화, 2008), 중학교 2학년의 정답률 72%(강현영, 2007)와 유사한 수준이다. 문자와 식을 배운 중상위권 학생들임에도 불구하고 문제별로 약 25% 정도는 도형 패턴의 일반화에 어려움을 겪었다는 것을 알 수 있다.

4명을 제외한 14명의 학생들이 도형적 접근을 중점적으로 사용하였다. 이러한 결과는 수치적 접근의 사용 비율이 더 높다는 선행연구(Becker & Rivera, 2005; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Krebs, 2003; Rivera & Becker, 2007)의 결과와는 상반되는 것이다. 선행연구는 “○단계의 개수는 몇 개인가? 어떻게 구했는지 설명해보시오.”와 같은 질문을 사용했다는 것을 고려했을 때, 각 단계를 그리고 타일의 수를 세도록 요구하는 형태의 발문이 학생들의 도형적 추론을 촉진한 것으로 판단된다. 이는 Lee & Freiman(2006)의 제안처럼 패턴을 그리는 활동이 시각적 특성을 사용하여 도형적으로 추론하도록 유도하는 효과가 있음을 확인한 것으로 볼 수 있다. 또한 대부분 학생들이 원 일반화나 기호적 일반화 단계에서 함수적 접근을 하였는데 그림에 개수를 표시하고 이를 이용하여 타일의

수를 나타내도록 하는 활동이 패턴의 시각적 구조와 대수적 표현의 연결을 촉진하는 것으로 판단된다. 따라서 본 연구의 질문방식은 대수적으로 유의미한 패턴 활동을 유도하는 역할을 할 수 있을 것이다.

재귀적 접근의 사용 비율이 높은 s8, s9는 단 한 문제의 일반식도 구하지 못하였다. s1이나 s7도 근 일반화나 원 일반화 단계에서는 재귀적 접근을 많이 사용하였지만, 기호적 일반화 단계에서는 함수적 전략으로 전환하였기 때문에 정답률이 높았다. 이는 재귀적 접근에서 함수적 접근으로의 전환이 패턴 일반화의 성공 여부를 결정하는 중요한 요소라는 선행연구의 결과를 지지한다(김성준, 2003; Orton & Orton, 1999; Rivera & Becker, 2011; Steele & Johanning, 2004). 학생들은 대부분 재귀적인 전략의 비효율성을 인식하고 있었으며 대부분 7단계의 식을 구할 때 함수적 규칙을 찾고자 시도하였다. Lannin et al.(2006a)의 연구결과처럼 효율성에 대한 욕구는 학생들의 전략 선택 및 전환에 있어서 촉매 역할을 하였다.

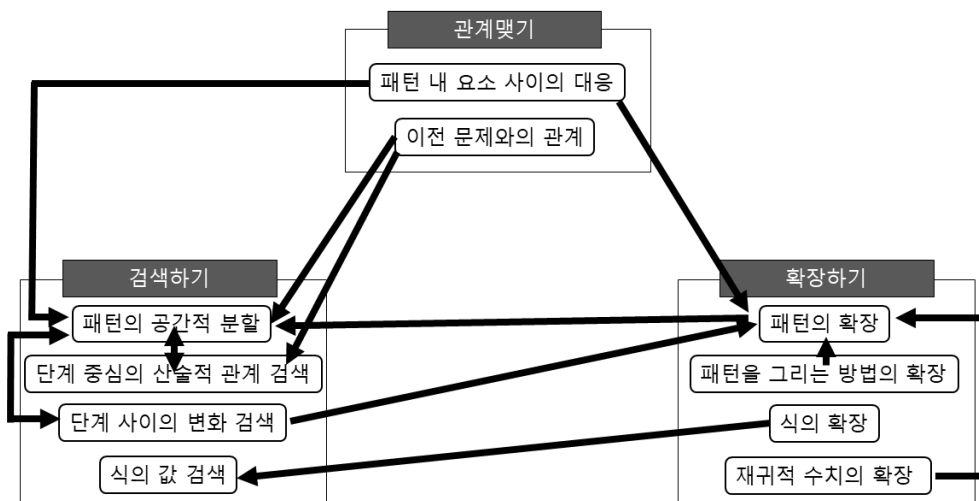
문제1, 2, 3의 경우 근 일반화 문항에서 재귀적인 접근이 많이 나타났는데, 이러한 결과는 Wilkie & Clarke(2016)의 역T 패턴을 5단계까지 확장하는 과제에서 재귀적 접근의 비율이 32.5%에 달하는 것과 일치하는 경향이다. 그러나 문제4에서는 패턴을 분할한 후 일부는 재귀적 관계로 일부는 함수적 관계를 이용하여 확장하는 경우가 많았는데, 이러한 혼합적인 접근은 선행연구에서는 보고되지 않은 것이다.

기호적 일반화 단계에서 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결 유형을 분석한 결과 전체의 89.9%가 구성적 일반화에 해당하였다. 이는 구성적 일반화 경향이 강했던 선행연구의 결과(English & Warren, 1998; Rivera & Becker, 2008)와 일치하는 것이며, Chua & Hoyles(2010)의 중등 예비교사를 대상으로 한 연구에서의 비율 50%보다도 확연히 높다. 그러나 학생들의 일반화 과정을 살펴본 결과 처음부터 패턴을 겹치지 않게 분할하는 것은 아니었다. 패턴의 규칙성을 찾을 때는 겹치는 부분이 존재하는 해체적인 방법으로 패턴을 분할하였지만, 최종적으로 일반식으로 표현할 때 구성적으로 변경하는 경우도 많았다. 이는 학생들이 겹치

는 타일을 처리하는 방법에 어려움을 느끼거나 겹치는 부분을 처리하는 계산을 비효율적이라고 생각하기 때문으로 판단된다. 또한 계산의 효율성을 확보하기 위하여 패턴의 구조를 해석하는 방법을 변경하는 경우도 있었다. 즉, 효율성에 대한 욕구가 전략 선택 뿐 아니라(Lannin et al., 2006a) 패턴의 구조와 대수적 표현을 시각적으로 연결하는 방식의 전환에도 영향을 주었다.

6.2. 패턴을 일반화하기 위한 행동

도형 패턴 일반화에서 학생들은 제시된 사례로부터 일반적인 규칙에 대한 가설을 생성하는 과정에서 가추를 사용하였고, 사례를 이용하여 가설을 검증하기 위해 귀납을 사용하였다. 즉, Rivera & Becker(2007)의 주장처럼 패턴 일반화 과정은 가추 단계와 귀납 단계의 반복으로 설명할 수 있었으며, 가추 단계와 귀납 단계에서 학생들은 다양한 유형의 행동을 하였다. 일반화 과정에서 나타나는 행동을 분석한 결과 [그림 IV-59]과 같이 총 10개의 유형으로 구분할 수 있었다. 10개의 행동 중 패턴의 공간적 분할, 단계 사이의 변화 검색, 단계 중심의 산술적 관계 검색, 패턴 내 요소 사이의 대응, 이전 문제와의 관계, 패턴의 확장, 패턴을 그리는 방법의 확장, 식의 확장, 재귀적 수치의 확장, 식의 값 검색



[그림 IV-59] 일반화 과정에서 나타나는 행동의 종류와 범주

중에 기여하는 중요한 패턴 일반화 행동으로 나타났다.

패턴의 공간적 분할은 패턴을 일정한 기준으로 분할하는 행동이다. 학생들은 일정한 방향으로 분할하거나 변, 꼭짓점 등 기하적 요소를 고려하여 분할하기도 하였다. 학생들은 제시된 사례가 동형의 구조로 분할되도록 분할 방법을 정하였다. 문제1, 문제3, 문제4와 같은 님은꼴 성장패턴에서는 도형의 기하적 요소를 고려한 분할이 많이 나타났고, 문제2와 같은 A, AB, ABB, ... 꼴의 성장패턴에서는 반복되는 부분인 B를 이용한 분할이 많이 나타났다. 문제1과 같이 형 우수성이 좋은 패턴에서는 분할이 빠르게 진행되었지만, 문제3이나 문제4와 같이 복잡한 패턴에서는 공간적 분할을 위한 구체적인 행동들이 나타났다. Radford(2014)는 도형 패턴에서의 분해가 단계의 수와 패턴의 수량적 측면을 연결짓는 함수적 관계의 창출을 가능하게 한다고 하였다. Rivera(2011)는 도형 패턴의 형태(shape)들은 부분 또는 부분집합의 관점에서 분석되어 해석된 구조 내에서 이치에 맞도록 작동해야 한다고 주장하였다. Amit & Neria(2008)은 도형 패턴을 몇 개의 도형들로 분해하는 것이 인지적으로 높은 수준의 사고를 요구하는 방법에 대한 반성으로 일반화에서 핵심적인 역할을 한다고 하였다. 실제로 본 연구에서도 패턴의 공간적 분할은 일반화에 있어서 핵심적인 과정임이 확인되었다. 일반화에 성공한 모든 학생들이 먼저 패턴을 분할한 뒤 추가적인 행동을 통해 분할 별로 재귀적 규칙이나 함수적 규칙을 가추하고 귀납하였다. 즉, 패턴의 분할은 일반화를 위한 다른 행동이 수행되기 위해 선행되어야 하는 작업이었다. 일부 학생들은 단계의 수를 이용하여 패턴을 분할하였는데, 이러한 분할은 함수 관계를 내포하기 때문에 함수적 규칙에 대한 가설을 쉽게 생성할 수 있도록 도왔다. Rivera(2010a)는 단계의 수를 이용한 분할을 주로 가추와 관련된 시각적 템플릿의 속성으로 보았다. 그러나 본 연구에서 단계의 수를 이용한 분할은 문제3과 문제4에서 유력한 가설을 가추하게 하는 전략으로 작용하였을 뿐 아니라 귀납의 과정에도 사용되었다. 또한 대부분의 학생들은 처음부터 단계의 수를 고려하여 패턴을 분할하지 않았다. 오히려 패턴의 지각적 특성을 기준으로 패턴을 분할한 뒤 각 분할 별로 산술적

관계를 검색할 때 단계의 수를 고려하는 경우가 더 많았다.

단계 사이의 변화 검색은 패턴의 연속된 단계를 비교하는 행동이다. 문제1과 같은 간단한 패턴에서는 시각적인 주의에 의한 비교만 나타났으나 보다 복잡한 패턴에서는 겹쳐 그리기, 찢개어 넣어보기 등의 구체적인 행동들이 나타났다. 학생들은 이러한 행동을 통해 패턴의 공통적인 형태, 불변하는 부분과 변화하는 부분의 성장 속도 등을 파악하였다. 거의 모든 학생이 큰 일반화 문항에서 패턴을 최초로 접했을 때 이 행동을 하였다. 이는 대부분의 학생들이 재귀적 규칙을 파악하는 것으로부터 일반화를 시작했다는 선행연구의 결과와 일치한다(Amit & Neria, 2008; Billings et al., 2007).

단계 사이의 변화 검색은 가추 단계와 귀납 단계 모두에서 나타났다. 변하지 않는 부분의 인식은 패턴의 분할 방법의 수정에 영향을 주며 함수적 관계의 가추에 기여하기도 하였고 일부 학생은 연속된 단계 사이의 변화의 안정성을 시각적으로 검색하면서 확장한 패턴의 타당성을 검증하기도 하였다. 여러 연구자들이 패턴의 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 주의를 기울이는 것의 중요성을 언급하였으며(Mason et al., 2005; Radford, 2008), Rivera & Becker(2007)는 이러한 행동이 일반화에서 필수적임을 확인한 바 있다.

단계 중심의 산술적 관계 검색은 단계의 수와 패턴의 수량적 측면 사이의 산술적 관계를 반복적으로 검색하는 과정으로 일반식의 가추와 가장 직접적으로 연결된 행동이었다. 학생들은 한두개의 사례에서 단계의 수와 패턴의 수량적 측면 사이의 산술적 관계 중 가장 개연성 높은 관계를 선택하는 가추적 사고를 하였으며, 동일한 산술적 관계가 다른 사례에서도 성립하는지 확인하는 귀납의 과정을 통해 함수적 규칙을 일반화하였다. 이때 학생들은 하나의 식으로 표현되는 규칙이 존재할 것이라는 가정 아래에서 분할 별로 산술적 관계를 반복적으로 검색하였다. 단계의 수와 일치하는 특성은 쉽게 발견하고 별도의 산술적인 과정 없이 빠르게 n 으로 인식되었는데, 이는 $y = x$ 에 대한 사전경험의 영향으로 판단된다. 학생마다 산술적 관계의 검색 방식이 달랐는데, 단계의 수를 타일의 수

로 바꾸는 연산을 검색하는 학생과 타일의 수를 단계의 수로 바꾸는 연산을 검색하는 학생으로 나눌 수 있었다. 단계 중심의 산술적 관계 검색은 일반화에 성공한 모든 학생에게서 공통적으로 나타나는 행동으로 함수적 관계를 찾기 위해 반드시 필요한 행동 중 하나로 볼 수 있다. Ellis(2007)의 일반화 행동 분류 중 동일 관계의 검색에 대응되는 것으로 볼 수 있다.

패턴 내 요소 사이의 대응은 패턴의 개별 단계를 구성하는 요소들 사이의 유사성, 반복성, 대응 관계를 형성하는 것으로 이렇게 형성한 관계는 가추 단계와 귀납 단계에서 일반식을 가추하고 귀납하는 데 활용되었다. 학생들은 쉽게 함수 관계를 파악할 수 있는 특성과 그 주변 사이의 물리적 관계를 이용하여 패턴을 확장하였다. 또 문제4와 같이 닫힌 패턴에서는 대응되는 변 사이의 관계를 이용하여 패턴을 확장하거나 함수적 규칙을 찾았으며, 문제1, 문제3과 같은 경우에는 반복성을 활용하여 일부 분할만 보고 전체에 대한 규칙을 가추하거나 검증하였다. 개별 단계의 도형을 구성하는 요소 사이의 관계이므로 여러 단계에 걸친 공통성과 직접적인 관계는 없지만, 일반화를 간접적으로 지원하는 행동으로 볼 수 있다. 이는 Ellis(2007)의 관계맺기 범주 중 ‘대상 사이의 관계맺기’에 속하는 행동으로 볼 수 있다.

이전 문제와의 관계는 이전에 일반화했던 패턴과 유사한 특성을 갖는 패턴이 제시되었을 때 이전의 패턴에서 성공적으로 사용하였던 일반화 행동을 새로운 패턴에도 적용하는 것이다. 문제2에서 흰 부분의 규칙을 찾아 활용하였던 학생 중 일부는 4단계에서도 흰 부분의 규칙을 찾아 활용하려고 시도하였다. 문제3에서 꼭짓점에 있는 타일을 빼면 단계의 수가 나온다는 사실을 이용했던 s6은 문제4의 꼭짓점에 대해서도 동일한 방식의 산술적 관계의 검색을 하였다. 이는 이전 문제에서 사용했던 전략이 학생들의 일반화 전략의 선택에 영향을 미친다는 Lannin et al.(2006a)의 결과와 관계된 행동으로 볼 수 있다. 또한 Ellis(2007)의 일반화 행동 중 ‘상황 사이의 관계맺기’와 대응되는 것으로 볼 수 있다.

패턴의 확장은 도형 패턴을 직접 그려서 확장하는 행동이다. 일부 학

생들의 경우 패턴의 4단계 또는 7단계를 확장하다가 패턴의 구조에 대한 시각적 단서를 발견하였다. 이러한 순간은 패턴을 그리는 과정에서 나타나는 시각적 주의의 움직임이 패턴의 어떤 특성을 발견할 수 있는 가능성을 높이는 주의 패턴과 일치할 때 나타났다. 이는 특정 방식의 주의 유도가 문제 해결에 대한 통찰을 제공할 수 있다는 인지심리학의 연구결과와 유사한 측면이 있다(Grant & Spivey, 2003; Thomas & Lleras, 2007). 또한 일정한 시각적 주의의 루틴으로부터 패턴의 규칙성이 발견되는 순간은 Noss et al.(1997)의 마이크로월드 Mathsticks에서 가상의 성냥개비를 선택-클릭-드래그-배치-선택-클릭-드래그-배치-... 와 같은 반복적인 리듬적 행동(rhythm of action)이 대수적 표현으로 연결되는 장면, Radford(2010)의 연구에서 대상화를 이끄는 기호학적 수단이었던 리듬적 제스처 및 세기 활동과 연결된다. 이러한 선행연구의 장면들은 어떤 반복적이고 리드미컬한 행동(그리기, 세기, 컴퓨터 환경에서의 조작)으로 인해 주의가 패턴의 대수적으로 유용한 구조를 발견할 수 있는 형태로 유도되면서 학생이 패턴의 구조를 인식하게 된 것으로 해석할 수 있다.

또한 패턴의 확장을 통해 추가적으로 구성된 사례는 주어진 3개의 사례와 함께 규칙성을 가추하고 귀납하는 데 사용되었다. 이는 패턴을 직접 그리게 한 후에 수량적인 측면의 질문을 하는 것이 의미 있는 패턴 활동을 돕는 수단이 된다는 선행 연구의 주장을 뒷받침하는 결과라 할 수 있다(Billings, 2008; Lee & Freiman, 2006). 패턴의 확장은 그 방법에 따라 Ellis(2007)의 일반화 행동 중 ‘연속적 확장하기’ 또는 ‘조작적 확장’과 대응된다. 그러나 본 연구에서는 패턴의 확장이 학생이 스스로 일반화를 위해 선택한 행동이 아니라 과제에 의해 안내된 행동이었다는 점에 차이가 있다.

패턴을 그리는 방법의 확장은 패턴의 확장과 관계된 행동으로 작은 단계를 확장할 때 사용한 절차를 더 큰 단계의 확장에 적용하는 것이다. 학생들은 4단계를 그리는 절차를 그대로 7단계에 적용하는 경우가 많았다. 7단계를 그린 후 확장된 패턴의 타당성을 확인하고 규칙을 찾기 위

한 시도를 하였다. 이는 Ellis(2007)의 일반화 행동 중 ‘적용 범위의 확장’에 해당한다고 볼 수 있다.

식의 확장은 특정 단계에서 단계의 수를 중심으로 표현한 계산식에서 단계의 수를 n 으로 바꾸어 일반식을 생성하는 행동이다. 7단계에서 이미 함수 관계를 일반화한 경우에 이러한 행동은 올바른 일반식으로 이어졌다. 그러나 7단계에서 타일의 수를 바르게 구하지 못한 상황에서 식의 외형에 기초한 직관적 확장을 통해 구한 일반식은 귀납의 과정이 생략되면서 잘못된 일반화를 초래하기도 하였다. Ellis(2007)는 이러한 일반화 행동을 ‘적용 범위의 확장’으로 분류하였다.

식의 값 검색은 일반식의 n 에 숫자를 대입했을 때 실제로 해당 단계의 타일의 수가 나오는지 반복적으로 검색하는 행동으로 주로 귀납의 단계에서 많이 나타났다. 이는 자신의 일반식을 특수한 사례에 적용시켜 보는 검증 방법으로 볼 수 있다. 식의 값 검색은 구조를 이용하여 일반화한 후 마지막에 식을 점검하는 차원에서 사용되거나 수치적 접근 중심의 연결 전략이나 시행착오적 추측과 확인 전략을 사용할 때 추측의 확인 수단으로 사용되었다.

재귀적 수치의 확장은 재귀적인 관계를 이용하여 수열을 확장하는 행동이다. 일부 학생들은 귀납 단계에서 재귀적으로 구한 수를 함수적 관계를 이용하여 확장한 4단계나 7단계 패턴을 일종의 더블카운팅 같은 방식으로 검증하는 데 사용하였다. Amit & Neria(2008)의 연구에서도 이러한 재귀적 관계를 활용한 검증이 나타났는데, 그들은 이를 일반화 자체에 대한 의미 있는 반성으로 분류하였다. 그러나 일부 학생들은 재귀적인 방법에 기초한 수치에만 의존하여 패턴의 구조를 재귀적 수치에 투영하거나 추측과 확인의 반복을 통해 패턴을 확장하기도 하였다.

이상의 10가지 행동은 행동의 의도와 특성에 따라 [그림 IV-59]와 같이 Ellis(2007)의 일반화 행동의 세 가지 범주를 이용하여 분류할 수 있었다. Ellis의 연구는 톱니기어, 캐릭터의 속도를 맥락으로 하는 실생활 일차함수 상황에 대한 8학년 학생들의 일반화 과정을 분석하여 분류한 것

이고 본 연구는 도형 패턴 과제를 사용하였기 때문에 나타나는 일반화 행동의 구체적인 형태에 차이가 있었다. 예를 들어, 패턴의 공간적 분할이나 패턴 내 요소 사이의 대응은 도형적 추론과 관계된 행동으로 도형 패턴 과제 맥락에서만 나타날 수 있는 행동이다.

이러한 행동들은 완전히 독립적으로 분류될 수 있는 것이 아니며 서로 연관을 맺고 상호작용하거나 동시에 나타났다. 예를 들어, 이전 단계를 분할하여 다음 단계에 넣어보는 행동은 패턴의 공간적 분할이자 단계 사이의 변화의 검색이다. 단계의 수로 패턴을 분할해보는 것은 공간적 분할의 검색과 산술적 관계의 검색을 동시에 하는 행동으로 해석할 수도 있다. [그림 VI-59]에 표시된 화살표는 본 연구의 분석 과정에서 확인된 상호작용을 나타낸 것이다. 학생의 수준, 사용되는 패턴의 구조에 따라 새로운 상호작용이 나타날 수 있으며 새로운 행동과 범주가 나타날 수 있을 것이다. 이러한 행동에 대한 분류는 도형 패턴의 일반화 과정을 분석하는 이론적 틀을 제공할 것으로 기대된다.

본 연구에서는 안구 운동과 함께 학생들의 회상자극면담 내용을 분석하였기 때문에 발화, 제스처, 필기 등 외부적인 자원들에 의해 가시화되지 않는 행동들을 포착할 수 있었고, 보다 정밀하게 행동을 분류할 있었다는 점에서 Ellis(2007)의 연구와 차별화된다. 또 구체적인 행동 사이의 상호작용을 분석하고 가추-귀납의 단계에서 각 행동의 역할을 분석했다는 점에서도 의의가 있다.

또한 본 연구는 패턴 일반화를 가추 단계와 귀납 단계의 나선적 과정으로 본 Rivera(2010a)의 이론적 모델을 신경생리학적 자료를 통해 구체적으로 확인하였으며, 가추 단계와 귀납 단계에서 시도되는 학생들의 구체적인 행동들을 학습자 중심의 관점에서 분석하고 분류하였다는 점에서 그의 연구를 확장한 것으로 볼 수 있다.

동일한 문제에 대해 학생마다 서로 다른 행동이 나타났고 일반화 과정이 달랐다. 또 동일한 학생도 문제마다 서로 다른 행동을 시도하였다. 패턴을 확장하는 과정에서 ‘아하’의 순간을 통해 대수적으로 유용한 구조를 우연히 발견하는 장면이 나타나기도 하였다. 즉, 패턴이 모두 동일

하게 선형 증가이며 학생들의 수준이 거의 비슷하더라도 패턴의 유형이나 학생의 사전 경험에 따라 사용하는 행동의 유형이나 순서가 달랐다. 이는 문제 해결 맥락에서 패턴 일반화가 동적이고 다차원적이며 비계층적인 복잡한 과정이라는 선행 연구의 관점을 지지하는 것이다(Ellis, 2007; Rivera, 2013). 그러나 행동의 구체적인 형태나 순서는 다를지라도 단계 사이의 변화 검색, 패턴의 공간적 분할, 단계 중심의 산술적 관계 검색은 함수적 관계를 가추하기 위해서 반드시 수행되어야 하는 핵심적인 행동들이었다.

6.3. 시각적 주의의 특성

학생들은 근 일반화 문항을 가장 빨리 해결하였으며 원 일반화 문항을 해결하는 데 평균적으로 가장 많은 시간을 소요하였다. 또한 모든 문제에서 공통적으로 기호적 일반화 문항에서의 전환횟수가 근 일반화나 원 일반화 문항보다 적었다. 질적 분석 내용을 살펴보면 많은 학생들이 원 일반화 문항에서 7단계를 그리고 식을 세우는 과정에서 함수적 관계를 찾는 일반화를 시도하였고, 기호적 단계에서는 함수적 관계를 일반식으로 나타낸 후 몇 개의 사례를 통해 귀납적 검증을 하였다. 따라서 기호적 일반화 문항보다 원 일반화 문항에서 반응시간이 길고 AOI 사이의 주의 전환이 더 많이 일어난 것으로 판단된다. 또한 대체로 원 일반화 문항에 비해 근 일반화 문항의 전체 전환횟수가 많았는데, 패턴을 처음 접했을 때 단계 사이의 변화를 검색하는 과정에서 단계 사이의 주의 전환이 빠르게 자주 일어나기 때문인 것으로 판단된다.

문제별 반응시간의 경우 문제4, 문제2, 문제3, 문제1의 순서로 길었으며 문제3과 문제1의 차이는 통계적으로 유의하지 않았다.

응시시간과 응시율, 전환횟수를 보면 학생들은 문제1, 문제3, 문제4과 같은 닳은꼴 성장패턴에서는 주로 1단계보다 2단계와 3단계를 이용하여 일반화를 하였음을 알 수 있다. 그러나 문제2와 같은 A, AB, ABB, ... 꼴의 유형에서는 상대적으로 1단계를 오래 응시하였으며 쓰기 영역과 1단계 사이의 전환횟수가 다른 AOI 사이의 전환횟수보다 더 높았다. A, AB,

ABB, ... 꼴의 패턴에서는 1단계에 변하지 않는 부분 A와 추가되는 부분 B가 모두 포함되어 있기 때문에 패턴을 확장하거나 규칙을 찾을 때 1단계를 많이 활용하는 것으로 해석할 수 있다. 일부 학생은 1단계가 2, 3단계가 공통으로 갖는 시각적 특성을 보이지 않기 때문에 대표성이 없다고 생각하였다. 일반적으로 학생들이 문제1, 문제3, 문제4와 같은 유형의 성장패턴에서는 2, 3단계를 근거로 일반화를 하는 것인지 아니면 실험에서 사용된 패턴들의 1단계가 가진 시각적 특수성이 영향을 미친 것인지에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다. 그러나 패턴의 유형에 따라 학생들이 제시되는 단계의 시각적 정보를 활용하는 양상이 다르다고 판단할 수 있다.

학생들은 주로 연속된 단계를 비교하며 일반화한다는 것을 전환횟수를 통해서 알 수 있었다. 또한 쓰기-단계 간 전환이 많이 나타났는데, 시선 흐름을 보면 학생들이 패턴의 규칙을 완벽히 파악하고 그림을 그리거나 식을 쓰는 것이 아니라 계속 제시된 사례를 응시하면서 패턴을 분할별로 그리거나 규칙을 찾았기 때문에 일반화 과정 전반에 걸쳐 각 단계와 쓰기 영역 간의 시선 전환이 계속 나타나는 것으로 해석할 수 있다.

대부분의 경우 학생들의 시각적 주의는 내적 처리 과정과 관계가 있어 Just & Carpenter(1980)의 눈-마음 가설이 성립하였으나 정서적인 동요가 있을 때나 암산을 할 때에는 눈-마음 가설이 성립하지 않았다. 이는 Schindler & Lilienthal(2019)의 기하적 증명 과정에 관한 연구에서 학생이 암산을 할 때와 실수를 하거나 새로운 방법을 발견했을 때 눈-마음 가설이 성립하지 않았다고 보고한 것과 유사한 결과이다. 학생들의 회상자극 면담에 대한 자기보고는 안구 운동을 통해 내적 처리 과정을 정확히 파악하는 중요한 정보를 제공하였다. 특히, 안구 운동이 동기화된 문제 해결 영상은 학생들이 자신의 내적 처리 과정을 시간의 흐름에 따라 자세히 회상할 수 있도록 돕는 역할을 하였다. 그러나 학생이 모든 안구 운동을 해석할 수 있었던 것은 아니다. 때때로 자신의 안구 운동 패턴이 나타난 이유를 설명하지 못하였다. 또 학생마다 자기보고의 질과 양의 차이가 있었는데, 영상을 보고 자신의 문제 해결 과정을 상세히 복기해

낼 수 있는 학생이 있는가 하면 영상을 보고도 자신의 문제 해결 과정을 자세히 설명하지 못하는 학생도 있었다. 이는 “자신의 생각을 얼마나 정확하게 설명할 수 있는가?(Schoenfeld, 1987, p. 190)”와 관계된 메타인지 능력에서 개인차가 있음을 보여준다.

6.4. 오류의 유형 및 원인

근 일반화 문항에서는 재귀적 관계나 함수적 관계를 잘못 이해하는 경우가 가장 많았다. 일부 학생들은 1단계의 외곽에 몇 개의 타일을 붙이면 항상 2단계를 만들 수 있다는 오개념을 갖고 있었는데, 안구 운동을 확인한 결과 이 학생들은 반복패턴을 염두해 둔 상태로 패턴의 일부분만을 관찰한 후 패턴을 확장하였다. 또 자신이 그리는 패턴과 주어진 패턴에서 동일한 기준으로 대응되는 분할을 비교하지 못함으로써 함수적 관계의 이해에 대한 오류가 발생했다. 규칙을 제대로 파악했음에도 불구하고 패턴을 그리는 절차에서 오류가 발생하는 경우도 있었다.

원 일반화 문항에서는 확장한 7단계의 물리적 구조와 7단계 타일의 수를 나타내는 식을 연결하는 과정에서의 오류가 가장 많았다. 특히 패턴의 각 분할을 함수적인 관계를 이용하여 정확히 그린 경우에도 타일의 수를 정확히 표현하지 못하는 경우가 있었다. 학생들은 단계의 수 7을 이용하여 패턴의 각 분할의 타일의 수를 표현한 후 합쳤는데, 그 과정에서 겹치는 부분을 정확히 처리하지 못하는 경우가 있었고 근 일반화의 경우와 마찬가지로 패턴의 분할을 일정하게 유지하지 못하면서 오류가 발생하기도 하였다. 이러한 오류는 단순히 타일의 수를 세지 못하는 문제라기보다는 단계의 수 7을 이용하여 패턴의 구조를 표현하는 과정에서 발생하는 것이라 볼 수 있다. 즉, 패턴을 상황적으로 확장할 수 있음이 패턴을 대수적으로 유의미한 구조로 셀 수 있음을 보장하는 것은 아니었다. 함수적 관계를 잘못 이해하여 그림을 잘못 그리는 경우나 4단계에서 사용한 잘못된 규칙을 이용하여 7단계를 확장하고 귀납적 검증 없이 타일을 직접 세는 오류도 있었다. 또한 재귀적인 접근에 기초하여 7단계의 수를 바르게 구하지 못한 상황에서 숫자에 투영하여 그림을 그리

는 경우도 있었다.

기호적 일반화 문항에서는 7단계에서 구한 잘못된 식을 n 단계로 확장하는 오류가 가장 많았다. 함수적 관계를 잘못 이해하는 경우와 패턴을 기하학적으로 변화하는 과정에서 실수를 하는 경우도 있었다. 한편, s8은 변수 n 의 의미를 알지 못하여 모든 문제의 일반식을 구하지 못하였는데, 예를 들면 2씩 늘어나는 부분을 $n+2$ 로 표현하였다. 이러한 오개념은 Rivera & Becker(2005)에서 수치적 접근을 사용한 예비교사의 사례로 보고된 바 있다.

학생이 한번 어떤 규칙이 성립한다고 잠정적으로 확정하고 나면 그 규칙에 오류가 있더라도 이를 인지하기가 어려웠다. 일단 본인이 잠정적으로 가추된 가설이 참이라고 결정을 내리면 귀납적인 검증을 하지 않았기 때문이다. 또 패턴을 응시하더라도 귀납이나 검증의 의도를 가지고 보지 않았기 때문에 오류를 발견하기 어려웠다. 학생들이 특정 방식으로 패턴을 바라보게 되면, 그들이 그러한 방식을 버리고 새롭게 패턴을 바라보는 것이 어렵다는 선행연구(Lee, 1996; Stacey, 1989)의 결과와 일치한다. 일반화에 성공한 학생들도 일반화 과정에서 유사한 오류들을 보였지만, 성공한 학생과 실패한 학생의 가장 큰 차이는 귀납적 검증의 실행 여부였다. 일반화에 성공한 학생들은 귀납적 검증을 통해 오류를 발견하고 규칙(가설)을 수정하는 과정을 통해 일반화에 성공할 수 있었다. 특히 패턴을 그리는 방법의 확장이나 식의 확장은 특수한 사례에 대한 추론의 적용 범위를 일반적인 사례로 확장하는 행동이라는 측면에서 일반화와 밀접하게 관계되지만(Kaput, 1999), 패턴의 구조를 정확히 파악하지 못하거나 반성적 과정이 수반되지 않는 상황에서는 오류로 이어지는 경우가 많았다. Amit & Neia(2008)는 대입 등의 절차를 통해 자신의 일반화 자체에 대해 반성하는 사고가 패턴 일반화에서 중요한 역할을 한다고 주장한 바 있다. 이상 오류 사례들로부터 학생들이 잘못된 일반화를 하게 되는 주요 원인을 다음과 같이 6가지로 도출할 수 있었다.

- 패턴의 물리적 구조에 대한 부정확한 지각

- 일관성 없는 패턴의 분할의 사용
- 포함-배제 원리 도식의 부재
- 패턴과 단절된 규칙의 확장
- 변수 개념에 대한 이해의 부족
- 귀납적 검증의 미 실시

V. 연구 2: 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습

일부 구성주의(constructionism) 연구자들은 지필 환경 기반의 패턴 활동에서 학생들이 겪는 어려움에 대한 대안으로 대수적 사고의 개발을 지원하는 마이크로월드를 설계하고 그 잠재성에 대해 분석하는 연구를 수행해왔다(Mavrikis et al., 2012; Noss et al., 1997; Noss et al., 2009). 그들의 연구에서 마이크로월드는 지필 환경에서 할 수 없는 일반화에 관한 사고 실험을 가능하게 하였으며 시각적 피드백을 통해 학생들이 자신의 일반화에 대해 반성할 수 있도록 주의를 유도하였다. 특히 마이크로월드에서 제공하는 제한된 표현체계를 통한 패턴 만들기 활동은 학생들로 하여금 재귀적 관계보다는 패턴을 구성하는 대상들 사이의 함수적 관계를 인식할 수 있도록 유도하였다.

한편, 거북 표현식(Cho et al., 2010)은 신체-동조적으로 이동하는 거북이를 통해 패턴을 만들 수 있으며 공간적 구조와 수량적 구조를 모두 나타낼 수 있으며, 대수적 표현과의 연결성이 좋고 의사소통에 용이한 비형식적 문자표현이다. 일부 선행연구는 거북 표현식이 반복, 치환, 변수와 함께 사용되었을 때 대수적 일반화를 지원하는 잠재성이 있음을 보고하였다(Cho et al., 2012; Cho et al., 2016).

이에 연구 2에서는 선행연구와 연구 1에서 분석한 어려움의 원인을 바탕으로 대수적 사고의 개발을 지원할 수 있는 거북 표현식 기반의 마이크로월드를 설계하고 그 교육적 잠재성에 대해 분석하고자 하였다.

1. 연구방법

1.1. 연구 참여자

본 연구에는 중학교 3학년 학생 4명이 참여하였다. 이들은 연구1의 실

험에 참여하였던 학생 중 패턴 일반화 역량이 낮은 s5, s8, s9, s10이다.

s5의 경우 다른 세 학생에 비해 정답률은 높았지만 재귀적 접근을 많이 사용하는 학생이기 때문에 선택되었다. s5의 2학년 수학 교과 성취도²⁰⁾는 두 번 모두 A였다. s8과 s9는 연구1에서 4개의 모든 선형 패턴의 일반식을 구하지 못한 학생이다. s8의 경우 모든 문제에서 근 일반화와 원 일반화 문항을 해결하였는데, 대부분 재귀적 접근으로 패턴을 그렸으며 일부 문항에서는 수치적인 재귀 관계를 이용하여 구한 값을 이용하여 시행착오적 추측과 확인의 방법을 통해 패턴을 그렸다. s8의 경우 변수 n 에 대한 이해가 전혀 없었기 때문에 모든 문제의 일반식을 구하지 못하였다. s8의 2학년 수학의 성취도는 두 번 다 A다. s9 역시 수치적인 재귀적 접근을 주로 사용하였으며 차이 전략을 사용하는 오개념도 갖고 <표 V-1> 연구 참여자에 대한 기초 정보

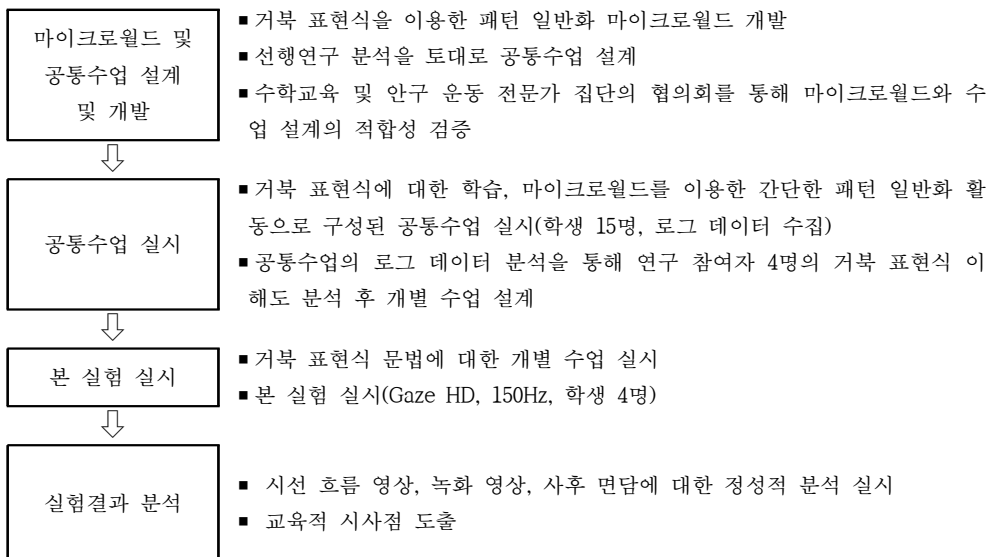
구분	성별	2학년 수학 교과 성취도 (1학기, 2학기)	연구 1 과제의 수행 정도(○: 정답, ×: 오답)												연구 1에서 나타난 일반화의 특성
			1(1)	1(2)	1(3)	2(1)	2(2)	2(3)	3(1)	3(2)	3(2)	4(1)	4(2)	4(3)	
s5	남	A, A	○	○	×	○	×	○	○	○	○	○	○	○	정확성이 떨어지고 재귀적 접근을 많이 사용함
s8	남	A, A	×	×	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	재귀/수치적 접근 만을 사용하며 변수 n 의 의미를 이해하 지 못함
s9	여	A, B	○	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×	재귀/수치적 접근 을 주로 사용하고 오개념 전략인 차이 전략을 사용하며 귀 납의 과정이 없음
s10	여	B, A	○	○	○	×	×	×	○	○	×	×	×	×	도형적 접근을 하 지만 정확성이 떨어 지고 귀납의 과정이 없음

20) 중학교 수학 교과는 성취평가제에서 성취도를 5개 수준(A-B-C-D-E)으로 평정한다.

있었다. s9의 성취도는 A와 B였다. s10의 경우 문제1을 제외한 나머지 문제의 일반식을 바르게 구하지 못하였다. s10은 모든 문제를 도형적으로 접근하였지만 정확성이 떨어져 함수적 관계를 정확히 파악하지 못하였고 귀납적 과정을 실행하지 않아 오류를 전혀 수정하지 못하였다. s10의 2학년 수학 교과 성취도는 B와 A였다. s8의 경우 고등학교 내용을 선행하여 등차수열과 등비수열을 알고 있었지만 다른 참여자들은 고등학교 내용을 선행하지 않았다고 응답하였다. <표 V-1>는 연구 참여자에 대한 정보를 요약한 것이다. 연구 참여자들에게 본 연구와 관련한 안내를 한 후 학부모와 학생 본인의 동의를 얻어 연구를 수행하였다.

1.2. 연구 절차

모든 연구 절차는 서울대학교 생명윤리위원회의 승인²¹⁾을 받은 후 진행되었다. 연구 2의 연구 절차는 [그림 V-1]과 같다. 문헌 연구와 연구 1의 결과를 토대로 학생들의 패턴 일반화를 촉진할 수 있는 거북 표현식



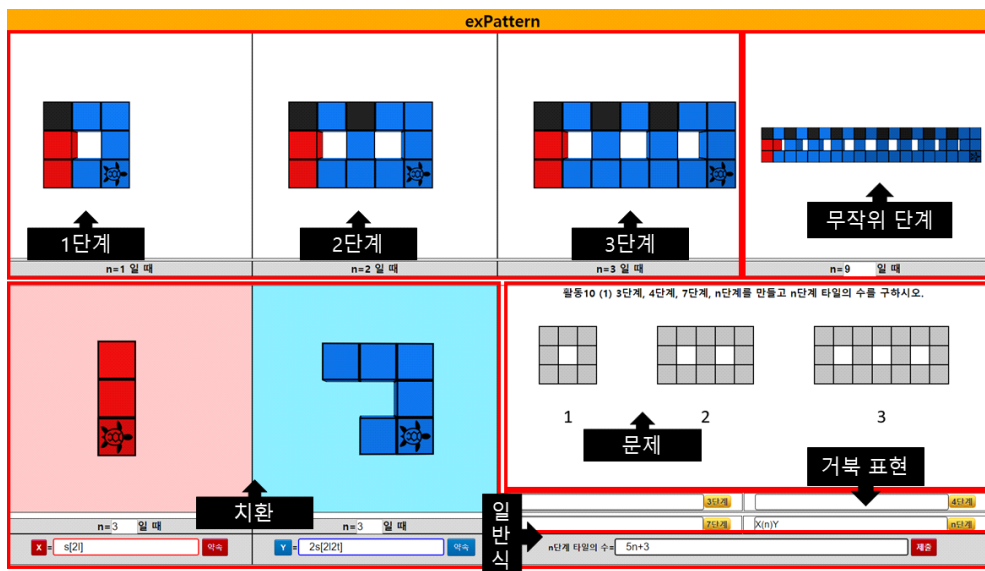
[그림 V-1] 연구2의 연구 절차

21) IRB No. 1904/003-007

기반의 마이크로월드를 개발하고, 개발된 마이크로월드를 이용하여 거북 표현식을 익히고 간단한 패턴 일반화 활동을 만들어보는 공통수업을 설계하였다. 수학교육공학 전문가 1명, 교사로 재직 중인 박사 과정 대학원생 1명, 교사로 재직 중인 석사 과정 대학원생 3명을 포함한 전문가 집단과의 세미나를 통해 마이크로월드 및 수업 설계의 적합성을 검증하고 수정·보완하였다. 공통수업은 연구 1에 참여하였던 전체 18명의 학생 중 2019년 7월 29일 교육 프로그램에 출석한 15명을 대상으로 45분씩 4차시로 총 180분 동안 실시하였다. 본 실험은 8월 1일, 8월 2일 오전 오후에 각각 1명씩 총 4명에 대해 개별적으로 실시하였다.

1.3. 거북 표현식 기반의 마이크로월드

패턴 일반화를 위한 마이크로월드 exPattern²²⁾은 HTML CSS로 연결큐브를 쉽게 생성할 수 있는 오픈소스 라이브러리인 voxel.css²³⁾를 활용하



[그림 V -2] exPattern의 사용자 인터페이스와 화면 구성

22) 거북 표현을 실행하여 패턴을 출력하는 환경이라는 의미에서 실행한다(excute)와 패턴(pattern)을 합쳐서 exPattern으로 지었다.

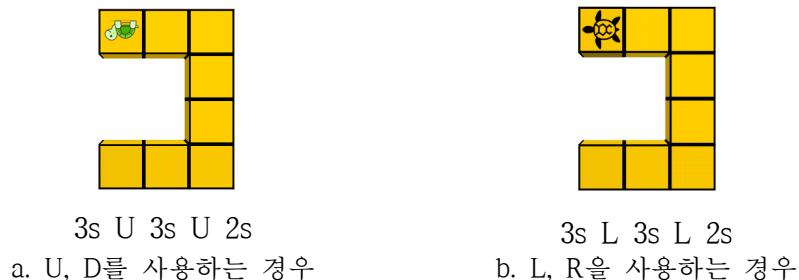
23) <https://github.com/HunterLarco/voxel.css>

여 웹앱 형태로 연구자가 직접 개발하였다. Cho et al.(2010)의 3D 거북 표현식을 수정하여 표현체계로 사용하였고, 패턴 일반화를 위한 마이크로월드에 관한 선행연구(Cho et al., 2012; Mavrikis et al., 2012; Noss et al., 1997; Noss et al., 2009)로부터 설계 원리를 도출하여 개발하였다.

[그림 V-2]는 exPattern의 사용자 인터페이스와 화면 구성을 보여주는 예시 화면이다. 학생들의 패턴 일반화 학습을 지원하기 위해 설계된 exPattern의 4가지 핵심 특징은 다음과 같다.

거북 표현식의 사용

본 연구에서 다루는 모든 패턴은 평면적이기 때문에 3차원을 나타낼 수 있는 거북 표현식의 행동문자 중 일부만을 사용하였다. 예를 들어 [그림 V-3] 은 U를 이용할 때와 L을 이용할 때 동일한 패턴을 그리는 과정을 비교한 그림이다.

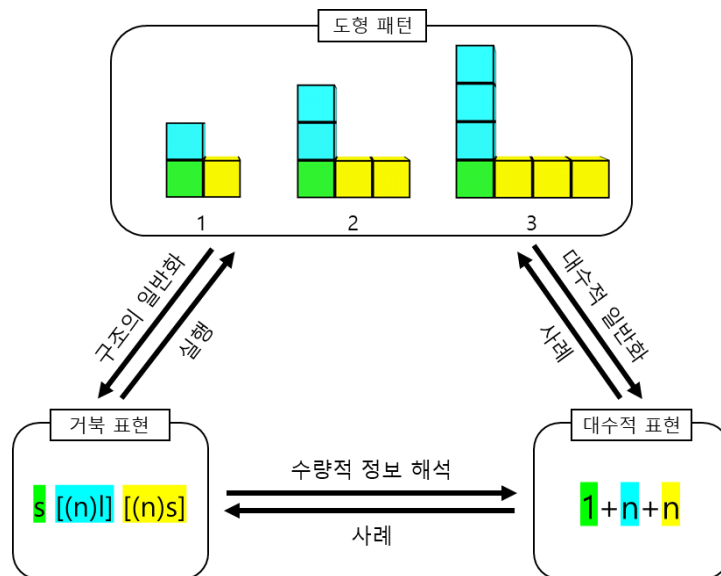


[그림 V-3] U, D를 사용할 때와 L, R을 사용할 때

[그림 V-3.a]의 경우 거북이가 위 아래로 회전하거나 움직이면서 패턴을 세우는 맥락으로 해석될 수 있으며, [그림 V-3.b]는 거북이가 바닥을 기어다니면서 좌우로 움직이거나 회전하면서 패턴을 그리는 맥락으로 해석될 수 있다. 거북 은유는 신체-동조성을 갖는데(Lakoff & Nunez, 2000), 회전 명령을 사용하여 거북이를 조작하기 위해서는 마치 거북이의 등 위에 올라탄 것처럼 거북이의 관점에서 생각하는 관점 변환(perspective-taking)이 필요하다. 인지심리학의 일부 연구들은 보는 사람의 실제 관점과 투영하는 대상의 관점 사이의 차이가 관점 변환의 어려

움에 영향을 준다는 증거를 제시한다(e.g. Hegarty & Waller, 2004). [그림 V-3.a]와 같은 경우 보는 사람의 입장에서 왼쪽, 오른쪽이 거북이의 입장에서는 위쪽, 아래쪽이 되지만, [그림 V-3.b]의 경우 보는 사람과 거북이가 모두 왼쪽, 오른쪽을 고려하면 된다. 실제로 2차원 LOGO를 확장한 3차원 LOGO에서의 사례 연구에서 학생들은 거북이가 벽이나 천정을 걷는 현실과 동떨어진 은유를 사용하는 데 어려움을 겪었다(Kynigos & Latsi, 2007). 따라서 U, D를 사용하는 맥락이 L, R을 사용하는 맥락보다 학생들이 패턴의 구조를 거북 표현으로 표현하는 데 인지적인 부담으로 작용할 것으로 판단하였다. 이에 U, D, u, d를 제외하고 앞(s), 뒤(t), 왼쪽(l), 오른쪽(r) 으로 이동하는 문자와 왼쪽으로 회전(L), 오른쪽으로 회전(R)하는 방향 문자로 제한하였다.

[그림 V-4]는 도형 패턴과 거북 표현, 대수적 표현 사이의 관계를 나타낸 것이다. 대수적 표현은 도형 패턴의 수량적 측면에 대한 표현일 뿐 구조를 나타낼 수 없다. 반면, 거북 표현은 패턴의 공간적 구조와 수량적 구조를 모두 나타낼 수 있는 문자 표현이기 때문에 대수적 표현과 도형 패턴을 연결하는 매개자 역할을 할 수 있을 것으로 기대하였다. 거북



[그림 V-4] 구조를 표현하는 중간언어로서 거북 표현식

표현식은 선행연구에서 사용된 프로그래밍 코드(Noss et al., 1997)나 도상적 표현(Noss et al., 2009)에 비해 대수적 표현과의 연결성이 좋고 간결하면서도 의사소통이 가능한 문자 형식이라는 장점이 있다. 또한 도형 패턴을 거북 표현식으로 나타내기 위해서는 도형 패턴을 분할하고 각 분할의 위치와 수량적 측면을 고려하여 거북 표현식으로 나타내야 한다. 따라서 거북 표현식의 사용이 패턴의 분할을 돕고 대수적 사고의 중요한 측면 중 하나인 대상을 기본 단위(building blocks)로 분해하는 습관(Cuoco, Goldenberg, & Mark, 1996)을 신장시킬 것으로 기대하였다. 또한 거북 표현식은 연구 1에서 확인했던 오류의 주요 원인은 중 하나인 패턴의 분할 기준을 일정하게 유지하는 것에도 도움이 될 것으로 예상하였다. 거북 표현식의 행동 문자는 MIC(Mathematics in Context Development Team, 2003)²⁴⁾ 교과서의 대수영역 중 “Pattern and Symbol” 에서 패턴을 나타낼 때 사용하는 문자와 동일한 역할을 한다. 어떤 대상을 기호로 표현하는 것은 대수적 사고의 출발점이다(Dörfler, 1991; Radford, 1996). 거북 표현식을 사용함으로써 학생들은 기호가 어떤 대상을 표현하는 데 사용될 수 있다는 것을 이해할 수 있을 것이다. 또한 패턴을 구성하는 요소를 언어적으로 표현하는 것은 패턴의 인식을 돕는다(Moss & McNab, 2011). 거북 표현식의 행동문자는 단지 대상을 나타내는데 그치지 않고 반복 문법, 변수와 결합하여 패턴의 일반화된 구조를 $(2 \cdot n + 1)s$ 와 같이 나타낼 수 있다. 이렇게 표현된 $(2 \cdot n + 1)s$ 는 마이크로월드에서 실행되어 임의의 단계를 출력해준다. Kaput(1999)은 대상과 연결된 기호의 조작과 탐구가 대수 교육에서 의미 있는 활동 중 하나라고 주장하였다. 이에 본 연구에서는 마이크로월드에서 패턴을 구성하는 표현체계로 거북 표현식을 사용하였다.

1, 2, 3단계와 무작위 단계의 출력

exPattern의 오른쪽 하단에 거북 표현식을 입력하고 실행하면 상단의

24) MIC(Mathematics in Context) 교과서는 미국 국립과학재단(National Science Foundation/NSF)의 후원 하에 네덜란드의 프로이텐탈 연구소와 미국의 위스콘신-메디슨 대학교의 연구 센터가 협력하여 개발한 교과서이다.

4개의 창에 패턴이 생성된다. 그 중 왼쪽 3개의 창에는 각각 $n=1$, $n=2$, $n=3$ 일 때의 표현식을 실행한 결과를 출력한다. 만약 거북 표현식에서 변수 n 을 사용하지 않을 경우 3개의 창에는 모두 동일한 패턴이 출력된다. 따라서 주어진 문제와 같이 1, 2, 3단계를 정확히 출력하기 위해서는 패턴의 변화하는 부분을 변수 n 을 이용하여 정확히 표현해야 한다. 연구 1에서 많은 학생들은 자신의 일반화의 오류를 인식하지 못하고 반성적 절차를 수행하지 못하였다. 이러한 설계는 연속된 1, 2, 3단계를 동시에 보여줌으로써 학생들에게 자신의 일반화를 점검하는 반성의 과정을 수행하도록 유도하고 오류가 있는 경우 오류 수정에 대한 단서를 시각적으로 제공할 것으로 기대했다. 또 변수 n 의 의미를 이해할 수 있도록 도움 것으로 기대하였다.

한편, 상단 맨 오른쪽 창에는 4이상 20이하의 자연수 중 무작위로 한 가지 수를 추출하여 n 에 대입한 후 표현식을 실행한 결과를 출력한다. 이는 eXpresser(Noss et al., 2009)의 ‘Generate Model’ 창과 동일한 효과를 주기 위해 설계한 것으로 학생들이 자신의 일반화를 스스로 점검하고 반성하는 계기를 제공해줄 것으로 기대했다. 또한 사용자는 직접 n 의 값을 변경하면서 하나의 거북 표현식으로 임의의 단계를 출력할 수 있는데, 이로부터 학생들은 대상의 구조를 일반화하는 것의 힘을 느낄 수 있다. 이는 Mavrikis et al.(2012)가 제안한 마이크로월드 설계 원리 중 구조를 인식하는 것의 유용성을 느끼게 하는 것과 관계된다.

치환 문자 X, Y의 사용

선행연구에서 학생들은 치환 문자를 이용하여 거북 표현식의 길이를 줄이는 과정에서 자연스럽게 반복되는 구조를 파악하였다(Cho et al., 2012; Cho et al., 2016). 이에 학생들의 치환사용을 지원하기 위하여 사용자 인터페이스를 설계하였다. 왼쪽 하단에 치환 문자 X, Y를 지정하고 치환된 모양만 따로 실행하여 확인할 수 있는 창과 버튼을 배치하였다. 학생들이 치환한 도형의 구조를 확인하고 점검할 수 있도록 별도의 치환 출력창을 배치하였다. 또한 닭은꼴 성장패턴에서는 치환되는 구조 자체

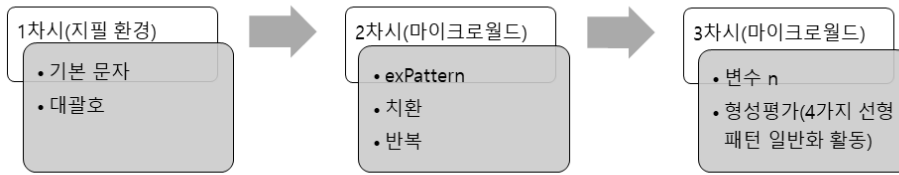
가 변수 n 을 포함할 수 있기 때문에 n 의 값에 따른 치환한 부분의 변화를 확인할 수 있도록 사용자 인터페이스를 설계하였다. 거북 표현식의 경우 재귀적 치환과 변수를 이용하면 재귀적 관계를 통해 임의의 단계의 패턴을 생성할 수 있다. 그러나 본 연구에서는 재귀적 치환 문법을 비활성화하였다. 이러한 생성방식의 제약이 선행연구(Mavrikis et al., 2012)와 마찬가지로 학생들이 패턴을 구성하기 위하여 단계와 패턴의 물리적 구조 사이의 함수적 관계에 주의를 기울이도록 유도할 것이라 기대하였다.

구체적인 시각적 피드백

Logo 기반 마이크로월드의 핵심 특징 중 하나는 즉각적인 피드백을 통해 학습자에게 반성의 기회를 제공한다는 것이다(조한혁, 2003; 김화경, 2006). 연구 1에서 많은 학생들은 자신의 일반화의 오류를 인식하지 못하고 반성적 절차를 수행하지 못하였다. 이에 학생들의 반성적 사고를 촉진할 수 있는 시각적 피드백을 제공하기 위하여 패턴의 출력 방식을 설계하였다. 치환 문자 X로 지정한 패턴은 빨간색으로, Y로 지정한 패턴은 파란색으로 자동으로 배치하여 학생들이 전체 패턴에서 치환된 패턴이 어떤 구조를 이루고 있는지 파악하기 쉽도록 설계하였다. 거북이의 현재 위치와 방향을 출력하도록 하여 학생들에게 패턴이 만들어지는 과정에 대해 자세한 피드백을 제공하고자 하였다. 연구 1에서 학생들은 겹치는 부분에 대한 처리를 어려워하는 경향이 있었으며 패턴을 분할하는 기준을 일정하게 유지하지 못하였다. 학생들에게 자신의 표현식이 중복해서 타일을 생성하는지 여부와 패턴의 분할 상황에 대해 피드백하기 위하여 타일이 중복되어 생성된 부분은 짙은 음영이 표시되도록 설계하였다. 이러한 시각적 피드백 방식이 학생들에게 자신의 일반화를 반성하도록 유도하고 오류에 대한 시각적 단서를 제공할 것으로 기대하였다.

1.4. 공통수업

학생들이 거북 표현식의 기본 문법에 익숙해도록 하기 위하여 교육 프로그램 수업의 일환으로 45분씩 총 3차시에 걸쳐 ‘코딩을 이용한 패

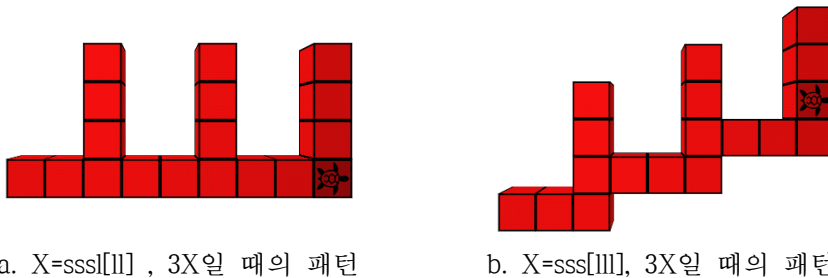


[그림 V-5] 공통수업의 진행 과정

턴 만들기’라는 제목의 수업을 실시하였다. 수업은 11년 경력의 고등학교 교사이자 7년 이상 중학생을 대상으로 거북 표현식 관련 수업을 해온 연구자가 직접 진행하였다. [그림 V-5]는 공통수업의 차시별 내용을 정리한 것이다. s8은 가정 사정으로 인하여 결석하여 공통수업에 참석하지 못하였고 그 외 3명은 모두 공통수업에 참여하였다.

1차시에서는 학생들이 지필 환경에서 심적 시뮬레이션을 통해 패턴을 만들면서 기본 문자 명령을 익힐 수 있도록 마이크로월드를 도입하지 않았다. 6가지 기본 문자 s, t, l, r, L, R를 소개한 후 몇 가지 도형을 만드는 명령을 쓰는 활동을 하였다. 동일한 패턴을 l, r을 사용하는 방법과 L, R을 사용하는 방법으로 만들게 하여 이동과 회전의 차이를 인식할 수 있도록 하였다. 마지막으로 대괄호를 도입하고 이를 이용하여 패턴을 겹치지 않고 만드는 활동을 하였다.

2차시에서는 먼저 exPattern를 소개하고 기본 인터페이스와 사용 방법에 대해 설명한 후 수업을 진행하였다. 반복 구조가 포함된 도형 2개를 제시하고 거북 표현식으로 만들도록 하였다. 이후 연구자는 코드를 효율적으로 줄일 수 있는 방법에 대해 생각해보도록 한 후 치환과 반복을 도입








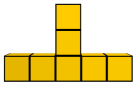
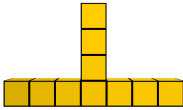

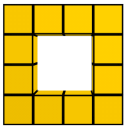
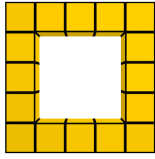


[그림 V-6] 대괄호의 위치에 따른 차이

하였다. 치환과 반복으로 2개의 패턴을 만드는 활동을 한 후 다시 초반에 만들었던 2개의 패턴을 치환과 반복을 이용하여 만들도록 하였다. 연구자는 학생들에게 “최소의 문자”를 써서 패턴을 만들도록 하였는데, 최소의 문자로 만들기는 학생들이 패턴에서 반복구조를 찾도록 유도하는 효율적인 교수 전략이다(Jeong, Cho, & Choi, 2020). 치환과 반복에서는 특히 반복패턴을 만들 때 대괄호의 역할에 대해 이해할 수 있도록 강조하였다. 거북 표현의 치환과 반복에서는 대괄호의 위치가 기본 단위를 반복하는 위치를 결정하기 때문이다. 예를 들어 [그림 V-6.a]와 [그림 V-6.b]는 대괄호를 제외하면 동일한 코드지만 대괄호의 위치로 인해 기본 단위가 반복되는 방법이 서로 다르다. exPresser에서는 평행이동 수치를 직접 입력하여 이 부분을 조절한다.

3차시에서는 변수 n 의 사용법에 대해 소개하였다. 연구자는 명령에 n 이 포함되었을 때와 포함되지 않았을 때를 비교하게 하면서 학생들 스스로

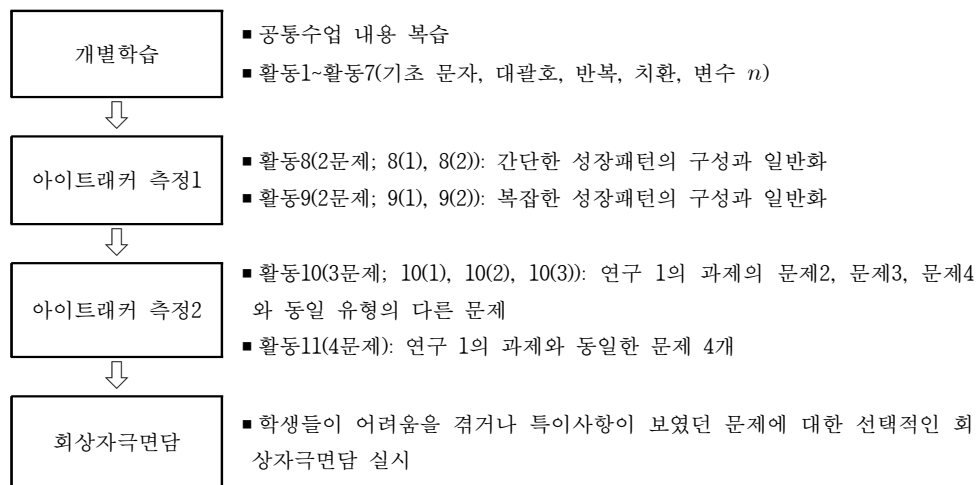
<표 V-2> 공통수업의 형성평가에서 사용된 패턴

번호	도형 패턴			일반식	선행연구
1				$3n$	Warren & Cooper(2008) 변형
2				$2n+2$	Radford(2000), Rivera & Becker(2011)
3				$3n+1$	Lee & Freiman(2006), Rivera & Becker(2011)
4				$4n+4$	Krebs(2003), Steel(2008)
5	exPattern을 이용하여 n 번째 그림에 사용되는 타일의 수가 $4n+1$ 인 패턴을 한가지 창의적으로 만들어 제출하시오.			-	-

로 n 의 기능과 역할에 대해 고민해볼 수 있도록 하였다. 반복패턴과 간단한 성장패턴을 n 을 이용하여 만드는 활동을 한 후 형성평가를 진행하였다. 형성평가는 개인별 평가로 진행되었으며 4개의 패턴 일반화 문항과 1개의 패턴 만들기 문항으로 구성되었다. 연구 1에서 사용하였던 문항 중 문제 1과 동일한 유형을 1개 포함하였으며 다른 유형은 본 검사에서 사용하기 위하여 사용하지 않았다. 패턴 만들기 문항에서는 일반식이 $4n+1$ 인 자신만의 창의적인 패턴을 거북 표현식으로 만들어 제출하도록 하였다. 형성평가에서 사용된 문항은 <표 V-2>와 같다.

1.5. 본 실험

본 실험의 전체적인 절차는 [그림 V-7]와 같다. 공통수업에서 수집한 로그 데이터에 대한 분석 결과 연구 참여자들은 거북 표현식의 사용에 조금씩 어려움을 갖고 있었다. 예를 들어, s9는 거북 표현식으로 입체를 만드는데 어려움이 있었고, s10은 대괄호에 대한 이해를 정확히 하지 못하였다. s5는 대괄호 사용에 일부 어려움이 있었으나 대체로 문법 이해도가 높았다. s8는 개인 사정으로 공통수업에 참석하지 못하였다. 따라서 아이트래커 실험을 실시하기 전에 학생들이 거북 표현식의 사용에 익숙



[그림 V-7] 연구 2의 본 실험의 절차

해지게 하도록 하는 목적으로 연구자가 직접 1:1로 공통수업 교재 내용을 복습하는 개별 학습 시간을 1시간에서 최대 2시간까지 가졌다. 학생이 거북 표현식의 문법에 충분히 익숙해졌다고 판단되었을 때 측정을 시작하였다.

아이트래커 측정의 경우 연구 1과 유사한 절차로 실행되었다. 안구 운동 측정 소프트웨어 Gazeport Analysis가 제공하는 11-point 알고리즘을 통해 보정(calibration)을 실시한 후 측정을 진행하였다. 실험참여자는 모니터로부터 약 60cm 떨어진 위치에 앉았다. 책상 위 모니터 앞에 키보드와 마우스를 배치하여 참가자들이 exPattern에서 문제를 해결할 수 있

<표 V -3> 본 실험의 측정에서 사용된 패턴

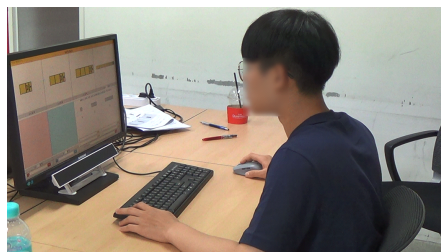
문제	도형 패턴	일반식	선행연구
8(1)		$2n$	■ 유미경, 류성림(2013)
8(2)		$6n + 4$	■ 연구자 제작
9(1)		$2n - 1$	■ 연구자 제작
9(2)		$2n + 1$	■ Bishop(2000), Rivera(2011)
10(1)		$5n + 3$	■ Mavrikis et al.(2009) 의 변형 ■ 연구 1 문제2과 동일 유형
10(2)		$4n + 2$	■ 연구자 제작 ■ 연구 1 문제3과 동일 유형
10(3)		$6n + 8$	■ 연구자 제작 ■ 연구 1 문제4과 동일 유형

도록 하였다. [그림 V-2]와 같이 학생들은 exPattern의 우측 하단에 표시되는 과제를 보면서 동일한 패턴을 거북 표현식으로 구성하도록 요구 받았다. 3단계, 4단계, 7단계, n 단계를 만드는 표현식을 입력할 수 있는 입력상자가 별도로 존재하였지만, 한번에 n 단계를 만들 수 있는 경우에는 n 단계를 바로 만들 수 있도록 하였다. 패턴을 완성한 후에는 일반식을 적은 후 제출하도록 하였다. 과제 해결 시간에 제한을 두지 않았으며, 참가자 스스로 오른쪽 하단의 ‘제출’ 버튼을 클릭하여 다음 문제로 넘어가도록 하였다. 실험 자료는 Full-HD(1920px×1080px) 해상도의 23인치 모니터의 전체화면 모드로 제시되었다. 실험이 시작되고 나면 연구자는 반대편으로 이동하여 듀얼 모니터로 학생의 과제 수행 장면을 보면서 측정상태를 실시간으로 점검하고, 문법적인 실수가 있는 경우 구두로 조언을 하였다. 측정은 2번에 나누어 실시하였는데, 측정1에서는 반복패턴과 성장패턴을 해결하도록 하였다. 측정2에서는 연구 1의 과제에서 사용되었던 4개의 유형 중 공통수업에 다루지 않았던 문제2, 문제3, 문제4와 동일한 유형의 패턴과 연구 1에서 사용된 과제와 동일한 문제를 사후검사의 의미로 사용하였다. 단, 연구 1의 문제3 W패턴의 경우 거북이로 구성할 수 있도록 각도를 90도로 변경하여 제시하였다. <표 V-3>은 본 실험에서 사용된 패턴을 정리한 것이다. 측정이 끝난 후 각 학생들이 어려움을 겪었던 문제나 특이한 장면이 나타났던 문제에 대해서만 일반화 과정에 대한 회상자극면담을 실시하였다.

[그림 V-8]은 연구 2의 본 실험 장면이다. 실험 시간은 s5, s9, s10은



a. 개별 학습 장면(s10)



b. 아이트래커 실험 장면(s8)

[그림 V-8] 연구 2의 본 실험 장면

2시간 내외 소요되었다. 그러나 공통수업에 참여하지 못한 s8은 거북 표현식을 처음부터 알려주었기 때문에 3시간 30분이상 소요되었고 시간 관 계상 마지막 검사2는 측정하지 못하였다.

1.6. 자료 수집 및 분석 방법

1.6.1. 아이트래커

연구 1과 동일한 GP3 HD(gazepoint社) 기종의 아이트래커를 사용하였다. 150Hz에 해당하는 샘플링 속도를 가지고 있으며 $0.5^{\circ} - 1.0^{\circ}$ 의 공간해 상력을 가지고 있다. 휴대용 타입으로 24인치 이하의 모니터 하단에 배치하면 적외선 카메라를 통해 연구 참여자가 화면을 보는 동안 안구 운동을 추적하고 기록한다. 보정 이후에는 머리의 자연스러운 움직임이 어느 정도 허용된다. 양안 추적 모드를 사용하였으며 150Hz의 샘플링 속도로 측정하였다.

1.6.2. 자료 수집 및 분석 방법

공통수업

전체적인 수업의 흐름과 연구 참여자들의 수업 참여 상황을 살펴보기 하여 수업 장면을 카메라를 이용하여 녹화하였다. 또한 공통수업에서 학생들의 패턴 일반화 수행 정도를 평가하기 위하여 exPattern에 사용자가 버튼을 클릭할 때마다 그 순간의 시간, 클릭한 대상의 이름, 입력한 거북 표현식 및 일반식의 내용을 PHP로 제작된 데이터베이스에 실시간으로 저장하는 시스템을 구축하였다[그림 V-9]. 거북 표현식은 패턴에 대한 구조적 표현이기 때문에 로그 데이터는 시간의 흐름에 따른 학생들의 패턴에 대한 해석의 변화에 대한 정보를 제공한다. 따라서 수업 영상과 로그 데이터 분석을 통해 각 학생의 공통수업 및 형성평가 수행 정도를 평가하고 거북 표현식 문법에 대한 이해도를 분석하였다.

변경	필드	id	name	time	page	clickobj	xn	promisex	yn	promisey	n4	strcode	ans
3983			376	박가	2019-07-29 14:02:06	free	실행	3		3	13	3s3l	
3982			377	박가	2019-07-29 14:02:07	free	실행	3		3	6	3s3l	
3981			378	조지	2019-07-29 14:02:20	free	실행	3		3	5	2s2sRsLsRfRsLsR	
3980			379	조지	2019-07-29 14:02:25	free	실행	3		3	14	2sRsLsR	
3979			380	미지	2019-07-29 14:02:27	free	실행	2	3	3	14	nulls[2s3l3k3r]null2srtnull3s	5
3978			381	조지	2019-07-29 14:02:32	free	실행	3		3	11	2sRsLsR2sRsLsR2sRsLsR2sRsLsR	
3977			382	미지	2019-07-29 14:03:02	free	실행	2	3	3	11	nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]	5
3976			383	고지	2019-07-29 14:03:04	free	재출	3		3	15	3ns	
3975			384	김지	2019-07-29 14:03:15	free	실행	3		3	4	3s	
3974			385	김지	2019-07-29 14:03:15	free	실행	3		3	6	3s	
3973			386	미지	2019-07-29 14:03:51	free	실행	2	3	3	9	nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]	5
3972			387	미지	2019-07-29 14:04:06	free	실행	2	3	3	8	nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]	5
3971			388	미지	2019-07-29 14:04:39	free	실행	3		3	13	3s[2s[3]5s]4s	
3970			389	미지	2019-07-29 14:04:52	free	실행	2	3	3	14	nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]	5
3969			390	미지	2019-07-29 14:05:24	free	실행	2	3	3	8	nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]nulls[2s3l3k3r]	5

[그림 V-9] exPattern의 로그 데이터 예시

본 실험

본 실험에서는 개별학습 과정 전체를 카메라를 이용하여 녹화하였다. 카메라 2대를 사용하였는데, 1번 카메라는 활동지를 확대하여 녹화하였고, 2번 카메라는 전체적인 모습을 녹화하였다. 컴퓨터 화면을 녹화해주는 오소프트社의 ocam 소프트웨어를 이용하여 모니터 화면도 대화와 함께 녹화하였다. 아이트래커 측정에서는 연구 1과 동일하게 Gaze Analysis 소프트웨어를 이용하여 학생들이 패턴을 만들고 일반화할 때의 안구 운동을 추적하여 기록하였다. 회상자극면담은 연구 1과 동일한 방법으로 실시하였다²⁵⁾.

안구 운동 자료는 질적 분석만을 실행하였다. 연구 1과 동일한 절차의 분석을 진행하였다. 먼저 시선 흐름 영상을 보면서 나타나는 안구 운동의 일정한 패턴(예: 1단계와 2단계의 동일 부분을 왕복, 무선적인 움직임, 어떤 특정 부분의 주위를 집중 응시 등)과 키보드 입력 시점을 기준으로 구간을 나누어 구간별로 시선 흐름 이미지, 그때 나타난 안구 운동 패턴과 거북 표현식 조작, 회상자극면담 내용을 표로 정리하였다. 표를 바탕으로 [그림 IV-7]과 같은 과정을 통해 연구 참여자의 내적 처리 과정을 해석하였다. 응시 최저 시간을 100ms로 설정하였으며 각 문제가 화

25) IV 장 1.4.2 참조

면에 나타난 이후의 첫 번째 응시는 직전 문제의 영향을 받으므로 분석에서 제외하였다(Holmqvist et al., 2011). 다음 문제로 넘어가기 위하여 제출 버튼을 누르고 대화 상자를 클릭하는 행동과 연관된 응시도 분석에서 제외하였다.

2. 연구 결과

2.1. 공통수업에서 학생들의 수행 정도

2.1.1. 형성평가 수행 정도

거북 표현식에 대해 완전히 숙지하지 못한 상태에서는 의미 있는 패턴 일반화 활동이 이루어질 수 없다(Cho et al., 2012). 따라서 공통수업에서 학생들의 거북 표현식 이해 정도를 평가하고 이를 토대로 본 실험에서 아이트래커를 측정하기에 앞서 거북 표현식에 대한 추가적인 활동을 실시하고자 하였다.

<표 V-4>는 s5, s9, s10의 형성평가 수행 내용을 표로 정리한 것이다. s8은 가정 사정으로 인해 공통수업에 결석하였다. 동일한 코드를 반복적으로 실행한 경우는 제외하고 실행횟수를 산출하였다.

s5의 경우 1번 문제에서 대괄호를 조절하는 데 많은 시간을 사용하였
<표 V-4> S5, S9, S10의 형성평가 수행 정도

구분	실행횟수				소요시간(분)				정답여부				비고
문제	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
s5	49	5	11	15	8	1	3	7	×	×	○	×	빠르게 해결하였지만 일반식에 오류가 존재
s9	19	71	12	9	6	21	5	6	○	○	○	○	옆 친구의 도움으로 해결
s10	41	12	30	25	25	4	14	11	○	○	○	○	교사, 친구의 도움으로 해결

지만, 이후 2번, 3번, 4번은 매우 빠르게 해결하였다. 총 19분이 소요되었다. 1, 2번의 경우 일반식에 특수한 값을 적었고, 문제4에서는 패턴을 정확히 만들었음에도 불구하고 일반식을 $4n+8$ 로 적어 틀렸다.

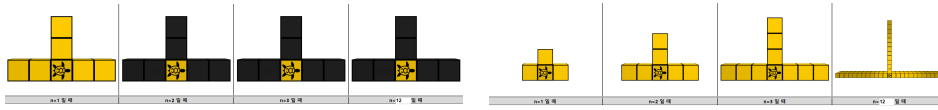
s9의 경우 변수 (n)을 사용하는 법을 정확히 이해하지 못하여 2번 문제에서 많은 시간을 소요하면서 여러 번 실행하였다. 모든 문제의 일반식을 구하였지만, 옆 친구의 도움을 많이 받았다. 성장패턴을 반복패턴으로 접근하는 경우가 있었으며 문법에 대한 이해도가 낮아 총 38분이 소요되었다.

s10의 경우 대괄호([,])를 이해하지 못하여 문제1에서 많은 시간을 소모하였다. 연구자가 개입하여 대괄호 문법에 대해 설명해준 뒤 간신히 1번 문제를 해결할 수 있었다. 그러나 2, 3, 4번에서도 대괄호와 변수 (n)을 정확히 사용하지 못하여 많은 시간이 소요되었고, 연구자의 개입을 통해 간신히 문제를 해결하였다. 문제 해결 시간도 총 54분으로 가장 오래 걸렸다.

이와 같이 동일한 수업을 통해 거북 표현식에 대한 활동을 하였지만 학생 개인별로 거북 표현식에 대한 이해 정도가 상이하였다. 특히 연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 낮았던 s9, s10은 거북 표현식의 사용도 어려워하였다. 상대적으로 연구 1에서 정답률이 높았던 s5는 거북 표현식도 더 빨리 이해했다.

2.1.2. 거북 표현식의 학습 과정에서 나타난 어려움

학생들은 s, t, l, r, L, R 등 기본 행동문자에 대해서는 빠르게 이해하고 사용하였다. 그러나 대괄호([,]) 문법과 변수 (n)의 사용에는 상대적으로 어려움을 겪었다. 예를 들어, s10은 형성평가 3번을 가운데 1개의 타일에 세 방향으로 n 개의 타일을 추가하는 방식으로 그리려고 하였다. 그러나 대괄호의 의미를 정확히 이해하지 못하였기 때문에 [그림 V-10.a]와 같은 코드를 반복하였다. 10여분 후 연구자의 개입으로 인해 [그림 V-10.b]와 같이 자신이 의도한 대로 코드를 작성할 수 있었다. s10은 공통수업이 다 끝나갈 때까지도 대괄호의 의미를 정확히 이해하지 못하였



a. $s(n)([2s][2l][2t])$ 의 실행 결과

b. $s[(n)s][(n)t][(n)l]$ 의 실행 결과

[그림 V-10] s10의 대괄호 사용 사례

고 교사나 친구의 도움으로 형성평가를 해결하였다.

학생들은 변수 (n)의 사용에도 어려움을 겪었다. 학생들은 $s(n+2)$, $2s[l(n+1)]s$ 와 같이 문자 뒤에 (n)를 쓰거나 nX 와 같이 소괄호를 누락하였다. 이러한 (n) 문법의 어려움은 s5, s9, s10에게서 모두 공통적으로 나타났다.

형성평가 로그데이터 분석을 토대로 개별학습 자료를 개발하였다. 공통수업에 참가하지 못한 s8의 경우 공통수업 교재에 연습용 문제를 더 추가하였으며, 특히 연구 1에서 문자 n 에 대한 이해가 부족했기 때문에 변수 (n)부분을 강조하였다. s5, s9, s10의 경우 대괄호 문법과 (n)의 사용 문법을 이해시키기 위한 활동들을 추가하였다.

2.2. exPattern에서의 패턴 일반화 과정

2.2.1. 패턴을 거북 표현식으로 나타내는 과정

측정1에서는 일부 학생들이 거북 표현식의 문법을 잘못 사용하는 모습이 나타났다. 예를 들면 s와 l을 바꿔쓴다거나 (n)이 분배법칙처럼 적용된다고 착각하는 경우가 있었다. 그러나 모든 학생들이 활동8과 활동9를 끝낸 이후로는 문법적인 어려움을 거의 겪지 않았다.

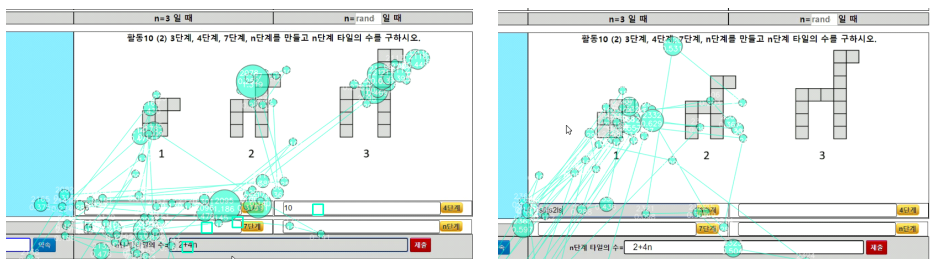
학생들은 문제가 제시되면 패턴의 1, 2, 3단계를 전체적으로 둘러보거나 각 단계의 동일한 분할을 비교하는 안구 운동을 하였다. 이는 연구 1에서의 초기 안구 운동과 유사한 것으로 단계 사이의 변화를 검색하는 행동으로 볼 수 있다. 이후 학생들은 패턴을 거북 표현식으로 나타내는 작업을 하였는데, 문제에 따라 바로 n 단계 거북 표현식을 구성하거나 3

단계, 4단계, 7단계를 차례로 거북 표현식으로 표현해 본 후 n 단계 거북 표현식을 구성하였다.

거북 표현식에 의한 패턴의 분할과 구조의 이해

학생들은 상대적으로 복잡한 패턴에서는 바로 n 단계 거북 표현식을 표현하지 않고, 1단계, 2단계, 3단계를 거북 표현식으로 만들어보는 행동을 하였다. 이는 연구 1의 지필 환경에서 학생들이 패턴을 이해하기 위하여 수행했던 패턴의 확장과 유사한 행동으로 볼 수 있다.

예를 들어, 활동10의 2번 기린 패턴에서 초반에 어려움을 느낀 s5는 연구 1에서 했던 것처럼 수치적 접근을 시도하였다. s5는 [그림 V-11.a]에서 볼 수 있듯이 1단계, 2단계, 3단계의 타일의 수를 직접 센 후 거북 표현식을 입력하는 입력 상자에 6, 10, 14를 쓴 후 연결전략을 이용하여 일반식 $2+4n$ 을 구하였다. 그러나 exPattern에서 패턴을 출력하는 유일한 방법은 n 단계 거북 표현식을 구성하는 것이기 때문에 수치적 접근으로 일반식을 구한 s5도 패턴의 구조를 다시 관찰하며 도형적 접근을 시도할 수 밖에 없었다.



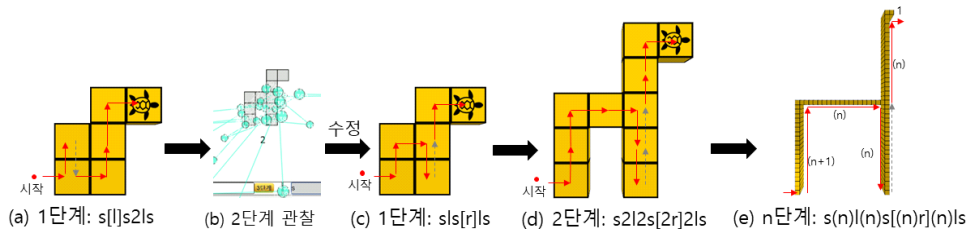
a. s5의 수치적 접근(연결 전략)

b. 1단계를 거북 표현식으로 나타낼 때의 안구 운동

[그림 V-11] s5가 10(2)에서 패턴을 거북 표현식으로 나타내는 과정

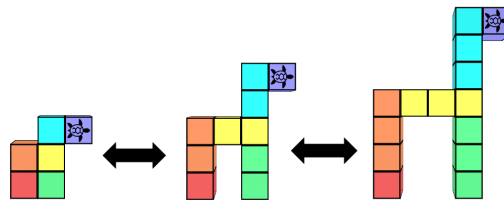
s5는 입력상자의 라벨을 무시하고 [그림 V-11.b]와 같이 1단계를 만드는 거북 표현을 3단계 입력상자에 입력하였다. 시선 흐름에서 볼 수 있듯이 1단계 패턴의 타일을 부분별로 확인하면서 이를 거북 표현으로 나

타냈다. s5의 1단계에 대한 초기 거북 표현식은 [그림 V-12.a]와 같이 s[l]s2ls 로 왼쪽 2개의 타일을 그린 후 다시 밑에서부터 두 번째 열을 그리는 방식이었다. 그런데 2단계를 거북 표현식으로 나타내기 위한 거북



[그림 V-12] s5의 거북 표현식의 변화 과정

이의 경로를 찾다가([그림 V-12.b]) 1단계의 거북 표현식을 s[s[r]]s로 수정하고([그림 V-12.c]) 2단계 거북 표현식을 s2l2s[2r]2ls로 입력하였다([그림 V-12.d]). 즉, 2단계를 만드는 거북이의 이동 경로를 찾다가 1단계도 2단계와 동일한 형태로 만들 수 있음을 이해하고 1단계가 2단계와 동일한 방법으로 그려질 수 있도록 코드를 수정한 것으로 볼 수 있다. s5는 이를 토대로 n단계 거북 표현식을 구할 수 있었으며, 회상자극면담에서 연결전략으로 구했던 일반식을 패턴의 물리적 구조와 연결하여 설명할 수 있었다. 즉, 1단계와 2단계를 그리는 공통의 이동 경로를 발견함으로써 패턴의 일반적인 구조를 이해하게 된 것으로 볼 수 있다.



[그림 V-13] 거북의 이동 경로에 따른 패턴의 분할

[그림 V-13]은 [그림 V-12]에서의 거북이의 이동 경로에 따라 각 단계가 분할되는 것을 표현한 것이다. 동일한 색상은 동일한 분할을 의미한다. 즉, 패턴의 각 단계를 동일한 형태의 거북이의 이동 경로로 해석

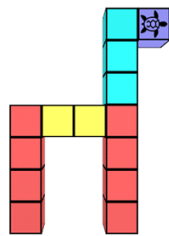
하는 과정은 패턴의 각 단계를 동일한 관점으로 분할하게 한다. 학생들은 이러한 과정을 통해 패턴 내의 변하는 요소와 변하지 않는 요소를 인식하고 공통의 구조를 발견할 수 있는 것으로 판단된다. 즉, 거북 은유는 대수적으로 유의미한 방식으로 패턴을 분할할 수 있도록 도왔다.

그러나 거북이의 이동 방식의 제약이 학생들에게 불필요한 인지적 과정을 야기하기도 하였다. 예를 들어 s10은 기린 패턴의 n 단계 거북 표현식을 s5와 동일하게 $s(n)l(n)s[(n)r](n)ls$ 로 구하였지만 일반식은 $2(n+1)+(n-1)+(n)+1$ 로 적었다. 다음은 이에 관한 s10과의 사후인터뷰 내용이다.

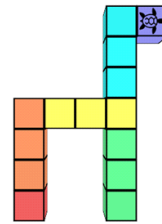
- t: 만든 거랑 타일의 수 센거랑 달라?
s10: 아니요 똑같은 거예요.
t: 그러면 $2(n+1)$ 은 어서 나온거야?
s10: 아 조금 다른데.. $(n+1)$ 이 다리 2개씩이고.. 가운데는 $n-1$ 이고 그다음에 여기 얼굴 부분은 n 개 갔다가 1칸 앞으로
t: 어 그럼 그린 거와는 다른방식이야?
s10: 그린 것도 그렇게 했었는데, 요 앞에 s 때문에 n 만큼만 가도 돼서 그렇게 했어요.
t: 아 똑같은 건가?
s10: 네 똑같이 했는데 s 때문에 1을 s가 가진거예요.
t: 아 그렇지 그래서 s랑 n 이 합쳐서 $n+1$ 인거고
t: 그럼 $(n)r$ 은? 이게 오른쪽 다리자나
s10: 여기서도 이미 s가 앞에 있어서
t: 아아 알겠다. 그래서 $n+1$ 이구나
s10: 네
t: 그러면 가운데 $n-1$ 은 모야?
s10: $n-1$ 원래 요건데(커서로 몸통을 가르키며)
t: 코드에는 그럼 어떻게 나와?
s10: 코드요? 코드에서는 먼저 간거예요.
s10: 여기를 2번 갔다가 내려간거예요(2단계를 예로 들며)
t: 패턴을 이해할 때는 그럼 세는 걸로 한거야? 그리는 걸로 한거야?

s10: 세는 길로 파악하고 코드는 이렇게 썼어요.

s10은 기린 패턴에서 두 개의 다리가 동일하다는 패턴 내 요소 사이의 반복성을 인식하고 이를 이용하여 패턴의 규칙성을 찾았다. 즉 s10은 [그림 V-14.a]와 같이 패턴을 두 다리와 몸통, 목과 머리로 분할하여 해석하였는데 이러한 분할은 거북이의 이동 방식의 제한으로 인해 그대로 거북 표현식으로 변환될 수 없었다.



a. s10의 분할



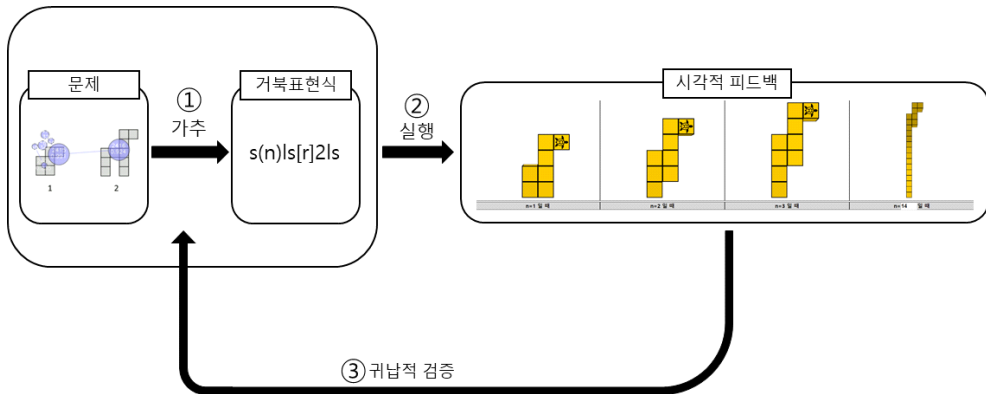
b. 거북 표현에 의한 분할

[그림 V-14] s10의 분할과 거북 표현에 의한 분할의 차이

s10의 경우 거북이의 이동방식을 고려하여 적절한 조작을 통해 거북 표현식과 패턴 일반화를 성공적으로 끝낼 수 있었지만 학생이 자신이 패턴에 대해 수립한 가추적 가설을 거북 표현식으로 그대로 표현하고 마이크로월드에서 실험해볼 수 없다는 것은 거북 표현식의 이동 방식의 제약이 주는 한계라고 볼 수 있다. 기린 패턴과 같은 유형의 성장패턴에서는 이동 방식의 제약으로 인해 다양한 구성 방법이 나타나지 않았다. A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서는 상대적으로 다양한 구성 방법이 나타났지만 이 역시 거북이가 이동가능한 방식에 한정된 것이었다.

n 단계 거북 표현식을 구성하는 가추-귀납적 과정

n 단계 거북 표현식을 작성하는 과정에서 컴퓨터 기반 마이크로월드와의 상호작용을 통한 가추-귀납적 일반화 과정이 나타났다. [그림 V-15]는 이러한 거북 표현식의 구성 과정을 도식화한 것이다. 전체적인 과정은 가추-실행-귀납으로 볼 수 있는데, 가추 단계에서 학생들은 문제에서

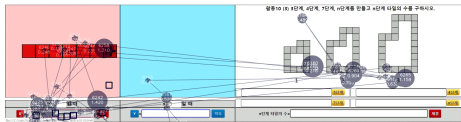
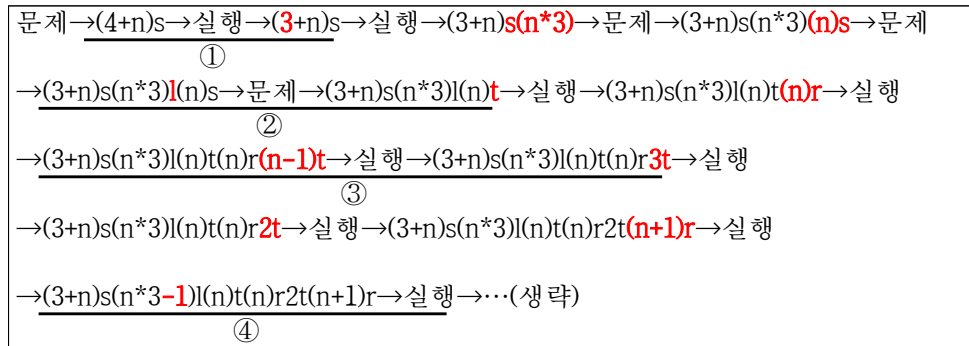


[그림 V-15] exPattern에서 거북 표현식을 완성해가는 가추-귀납적 과정

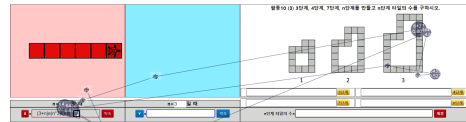
주어지는 3개의 사례에 대한 관찰을 통해 지필 환경에서 시도했던 단계 사이의 변화 검색, 단계 중심의 산술적 관계 검색 등과 같은 행동을 통해 패턴의 공통성과 규칙성을 파악하고 이를 변수 n 이 포함된 거북 표현식으로 나타낸다[그림 V-15.①]. 그리고 거북 표현식을 실행시켜([그림 V-15.②]) 출력되는 결과와 문제의 패턴을 비교하는 귀납적 과정을 거치는데([그림 V-15.③]), 출력된 결과와 문제가 일치하지 않을 때는 일치하지 않는 부위에 대응되는 거북 표현식을 찾은 후에 다시 문제의 패턴을 관찰하면서 거북 표현식을 수정하였다. 학생들은 출력 결과와 문제의 패턴이 일치할 때까지 이러한 과정을 반복하였다. 특히 학생들은 거북의 이동 경로에 따라 패턴의 분할 별로 이러한 과정을 거치면서 거북 표현식을 순차적으로 완성해나갔다.

예를 들어, <표 V-5>는 s9가 활동 10(3)의 패턴을 분할 별로 n 단계 거북 표현식으로 나타내는 과정의 일부이며 [그림 V-16]은 <표 V-5>의 ①, ②, ③, ④ 과정이 진행될 때 s9의 시선 흐름이다. s9는 치환 창을 이용하였지만 패턴 전체를 문자 X로 치환하는 것이기 때문에 치환의 의미는 없었다. s9는 밑변부터 반시계 방향으로 거북이를 이동시키며 패턴을 완성해갔는데 한 분할씩 [그림 V-15]와 같은 과정을 거쳤다. [그림 V-16.a]를 보면 s9는 밑변을 초기에는 $(n+4)s$ 로 가추하고 실행했다. 시선 흐름을 보면 실행 직후 문제와 출력 창을 비교한 후 $(n+3)s$ 로 수정하였

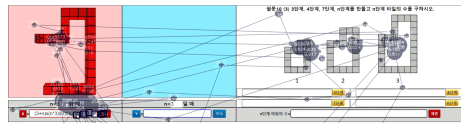
<표 V-5> s9가 활동 10(3)에서 거북 표현식을 작성하는 과정의 일부



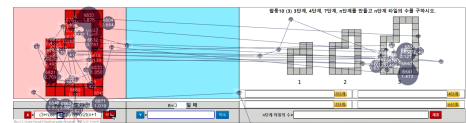
a. <표 V-5.①> 부분



b. <표 V-5.②> 부분



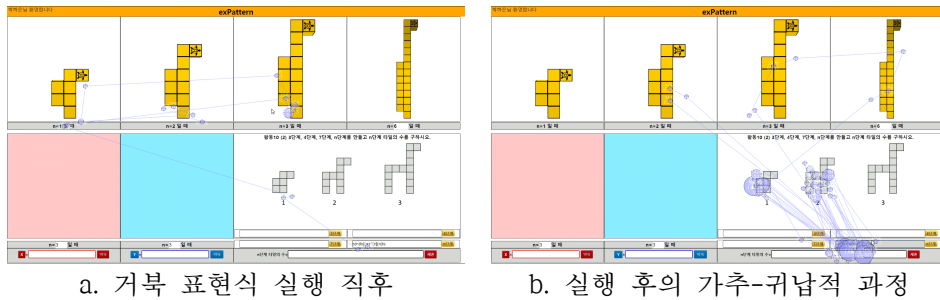
c. <표 V-5.③> 부분



d. <표 V-5.④> 부분

[그림 V-16] 10(3)의 거북 표현식을 작성할 때 s9의 안구 운동

음을 확인할 수 있다. [그림 V-16.b]에서는 문제를 관찰하고 마지막 행동문자 s를 l로 수정하였는데 이러한 장면은 아직 s9가 거북 표현식이 완벽히 내면화되지 않아서 방향이 혼동되었기 때문에 발생하는 것으로 해석할 수 있다. [그림 V-16.c]에서 s9는 초기에 3단계만 보고 해당 분할의 거북 표현식을 (n-1)t로 가추하고 실행하였다. 실행 결과가 3단계와 일치하게 나왔지만 s9는 1단계와 2단계를 응시하는 귀납의 과정을 통해 거북 표현식이 잘못되었음을 깨닫고 다시 3t로 수정하고 이후 다시 2t로 수정하였다. [그림 V-16.d]에서는 마지막 부분이 닫혀지지 않자 출력 결과와 문제를 전체적으로 비교하면서 잘못된 부분을 찾아 (n*3)l을 (n*3-1)l로 수정하는 과정에서의 안구 운동이다. 이후 s9는 몇 번의 실행과 거북 표현식의 수정을 통해 (n*3-1)l을 (2*n+2)으로 수정하여 거북 표현식을 완성하였다.



a. 거북 표현식 실행 직후

b. 실행 후의 가추-귀납적 과정

[그림 V-17] n 단계 거북 표현식을 실행한 이후의 s10의 안구 운동

[그림 V-17.a]는 s10이 거북 표현식을 실행한 직후 5초간의 시선 흐름이다. 1, 2, 3단계에서 모양이 어긋나는 부분에 주의가 유도되고 바로 수정할 부분을 찾기 위해 거북 표현식으로 시선이 이동한다. [그림 V-17.b]는 이후에 거북 표현식을 수정할 때까지의 안구 운동이다. 시선 흐름을 보면 1단계와 거북 표현식, 2단계와 거북 표현식 사이에 반복적인 전환이 있음을 확인할 수 있는데, 1단계와 2단계 각각을 거북의 이동 경로를 따라 거북 표현식과 비교한 후 다시 거북 표현식을 수정하고 실행하여 출력 결과를 확인하였다.

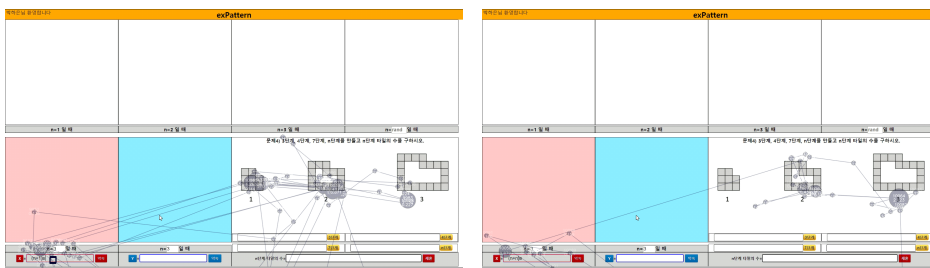
즉, 학생들은 현재 자신이 이해하고 있는 패턴의 구조에 대한 외재적 표상인 거북 표현식과 문제의 패턴을 비교하는 귀납의 과정을 통해 잘못된 부분을 찾고 또 새로운 규칙을 가추하여 거북 표현식으로 나타낸다. 따라서 이러한 시선 흐름은 거북 표현식이 구조적 표현으로써 학생들이 가추와 귀납에 의한 일반화를 보다 체계적으로 수행하는 데 활용된다는 증거로 볼 수 있다.

한편, s5, s8, s9의 경우 측정 후반으로 갈수록 거북 표현식에 익숙해지면서 실제로 실행하지 않고 문제만을 보면서 거북 표현식을 조작하고 수정하는 모습이 많이 나타났다. 예를 들어, <표 V-6>은 s9가 문제4의 거북 표현식을 완성하는 전체 과정에서 거북 표현식의 변화를 나타낸 것이다. <표 V-5>와 달리 실행을 한 번도 하지 않았음을 볼 수 있다.

[그림 V-18]는 <표 V-6.①>의 과정이 진행될 때의 s9의 시선 흐름이다. s9는 1, 2, 3단계의 밑변을 보면서 산술 관계의 검색을 통해 함수적

<표 V -6> s9가 문제4의 n 단계 거북 표현식을 작성하는 전체 과정

문제→(n+ →문제→(n+1)s→문제→(n+n)s→문제→(n+n)s→문제→(n+n)s(n)→문제
 ①
 →(n+n)s(n)l→문제→(n+n)s(n)l(n)t→문제→(n+n)s(n)l(n)tL→문제→
 (n+n)s(n)l(n)tL(n)→문제→(n+n)s(n)l(n)tL(n)t→문제→(n+n)s(n)l(n)tL(n)t→문제→
 ②
 (n+n)s(n)l(n)tL(n)t(n+1)→문제→(n+n)s(n)l(n)tL(n)t(n+1)r→실행
 ③



a. 밑변을 응시하고 (n+1)s로 가추

b. 귀납-가추를 통해 (n+n)s로 수정

[그림 V -18] 문제4의 n 단계 거북 표현식을 작성할 때의 s9의 안구 운동

규칙을 가추하고 이를 거북 표현식 (n+1)s로 나타냈다. 그러나 이 규칙은 잘못된 규칙이었다. s9는 다시 2단계와 3단계의 아랫부분을 보고, 특히 2단계의 윗부분을 응시하면서 패턴 내 요소 사이의 대응을 이용하여 기존의 규칙이 성립하지 않음을 깨닫고 거북 표현식을 (n+n)s로 수정한다. 이는 외적인 실행 없이 가추-귀납적 과정이 이루어진 것으로 볼 수 있다. 이와 같이 학생들은 문제를 관찰하면서 연구 1에서 나타났던 행동을 통해 거북 표현식을 가추하고 귀납적으로 확인하며 다시 새로운 규칙을 가추하였다. 한편, <표 V -6>의 ②, ③를 보면 수치적인 구조인 함수 관계를 찾고 다시 문제를 보면서 공간적인 구조에 해당하는 행동문자를 추가했음을 알 수 있다. 이와 같이 학생들은 입력창에 커서를 띄어놓고 문제와 거북 표현식에 계속 반복적으로 주의를 기울이면서 동적으로 구조에 대한 일반화를 하였다. <표 V -5>와 <표 V -6>에서 볼 수 있듯이 문제→거북 표현식 조작→문제→거북 표현식 조작→문제→... 와 같이 거북 표현식의 조작을 통해 단계적으로 패턴의 구조를 일반화하는 절차를 보

면 마치 거북 표현식이 패턴을 체계적으로 일반화하는 길잡이 역할을 하고 있음을 볼 수 있다. s9는 마지막 문제인 문제4에 이르러서는 단 한 번도 실행하지 않고 n 단계 거북 표현식을 구하는 데 성공하였다.

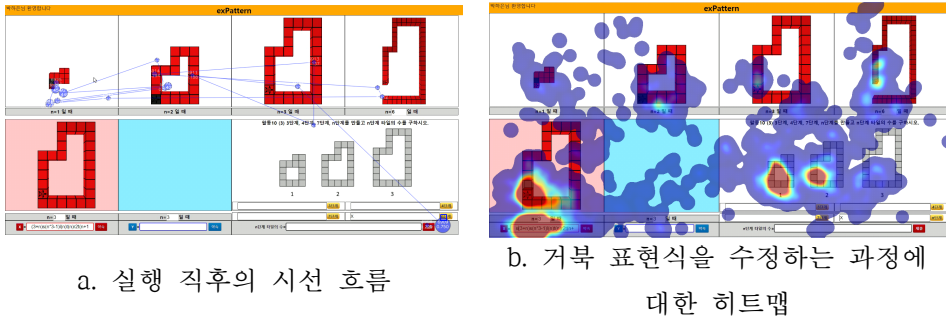
정리하면, exPattern에서는 [그림 V-15]와 같은 가추→(내적 또는 외적 실행)→귀납→가추(수정)→... 에 의한 일반화 과정이 나타났으며 패턴을 n 단계 거북 표현식으로 나타내는 구조의 일반화 과정에서 연구 1의 지필 환경에서 나타났던 행동들이 나타났다. 또한 패턴의 구조에 대한 외재적 표상으로써 거북 표현식은 학생들이 자신의 일반화와 문제의 패턴 사이의 관계를 조정하는 가추-귀납적 과정에서 자신의 일반화를 분석하고 조작하고 반성하는 사고의 도구로 활용되었다. 또한 거북 표현식은 패턴의 구조를 분할별로 순차적으로 일반화하는 절차를 체계적으로 수행하도록 돕는 길잡이 역할을 하였다.

패턴 일반화를 지원하는 시각적 피드백

exPattern은 n 단계 거북 표현식을 실행하는 경우 1, 2, 3단계는 물론 4 이상의 임의의 단계 중 한 가지를 보여준다. 이러한 다양한 시각적 피드백은 학생들로 하여금 자신의 일반화의 타당성을 쉽게 확인할 수 있도록 도왔다. 지필 환경을 사용한 연구 1에서 s9와 s10은 여러 문제에서 자신이 그린 그림과 주어진 패턴의 구조가 일치하지 않는다는 것을 인식하지 못하고 일반화를 수정하지 못하였다. 그러나 연구 2에서 s9, s10을 비롯한 4명의 학생은 시각적 피드백을 통해 자신의 일반화에 오류가 있는 경우 이를 즉각적으로 알아챘다.

s9는 <표 V-5.④>에서 닫힌 패턴이 될 수 있도록 오른쪽 세로 부분을 $(3*n-1)$ 로 수정하였다. s9의 수정은 3단계 단일 사례만을 고려한 조정이었기 때문에 올바른 규칙이 아니었다. 따라서 s9가 n 단계 창에 거북 표현식을 옮겨 실행했을 때 [그림 V-19.a]와 같은 패턴이 출력되었는데, 3단계는 문제와 일치했지만 1, 2단계는 겹치는 부분이 발생하였고 무작위로 선택된 6단계는 열린 형태로 출력되었다.

[그림 V-19.a]는 실행 직후 s9의 시선 흐름이다. 실제로 1, 2단계의 겹



[그림 V-19] s9의 시선 흐름

치는 부분과 임의의 6단계에서 떨어진 부분을 바로 확인한 것을 알 수 있다. s9는 자신의 n 단계 거북 표현식에 문제가 있음을 바로 깨닫고 이를 수정하기 위하여 다시 패턴을 관찰하였다. [그림 V-19.b]는 s9가 거북 표현식을 수정하는 초기 70초에 동안의 안구 운동에 대한 히트맵이다. 거북 표현식의 실행 결과로 출력되는 도형 패턴은 일반화 수정에 대한 단서를 제공한다. [그림 V-19.b]를 보면 s9는 출력된 패턴, 거북 표현식, 문제에서 접치거나 벌어지는 문제가 발생했던 왼쪽 하단 부분을 집중적으로 관찰했음을 알 수 있다. 이는 시각적으로 두드러지는 부분에 주의가 먼저 유도된 것으로 볼 수 있는데 약 2분간 왼쪽 부분의 거북 표현식을 수정하다가 이후에 오른쪽 부분의 일반화에 오류가 있음을 깨닫고 오른쪽 부분을 수정하여 성공적으로 거북 표현식으로 나타내었다. 즉, exPattern의 시각적 피드백이 제공하는 단서를 이용하여 s9는 거북 표현식의 조작과 실험을 통해 스스로 n 단계 거북 표현식을 완성하고 일반식을 구할 수 있었다.

연구 1과 같은 지필 환경에서는 n 단계 패턴의 구조를 ...을 이용하여 나타낸다 하더라도 그것의 타당성을 확인하기 어렵다. 그러나 exPattern에서는 구조적 표현인 거북 표현식을 4가지 단계를 통해 시각화시켜줌으로써 학생들이 귀납적인 검증을 쉽게 할 수 있도록 돕고 일반화에 오류가 있는 경우 어떤 부분이 잘못되었는지에 대한 시각적 단서를 제공한다. 그러나 오류에 대해 직접적으로 알려주는 것은 아니다. s9의 사례에서 볼 수 있듯이 단순히 지각적인 수준의 반성에 의한 거북 표현식의 수

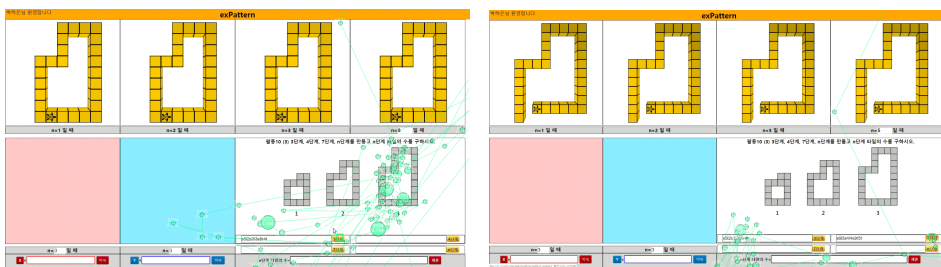
정만으로는 거북 표현식을 바르게 수정할 수 없다. 학생들은 지필 환경에서의 일반화 과정과 유사하게 도형 패턴의 물리적 구조를 고려한 반성적 사고를 통해 거북 표현식을 수정해야 한다. 따라서 exPattern에서의 상호작용을 통한 거북 표현식의 구성 과정은 질적으로 의미 있는 패턴 일반화 과정을 포함한다고 판단할 수 있다.

거북 표현식의 확장을 통한 일반화

학생들의 exPattern에서의 일반화 과정이 모두 [그림 V-15]와 같은 과정을 통해 이루어지는 것은 아니었다. 예를 들어 s5와 s8은 닳은꼴 성장 패턴에서 패턴의 구조를 고려하지 않은 채 거북 표현식의 적용 범위를 확장하는 행동을 하였는데, 이러한 행동은 일부 문제에서 경험적 패턴 발견하기(pattern-spotting) 활동으로 이어지기도 하였다.

예를 들어 s8은 활동 10(3)에서 먼저 [그림 V-20.a]와 같이 3단계를 거북 표현식으로 나타냈는데 이때의 거북 표현식은 s5l2s3l3s8r4t 이었다. 그다음 s8은 [그림 V-20.b]와 같이 패턴을 응시하지 않고 3단계 거북 표현식을 참조하면서 3단계 거북 표현식에서 숫자만 1씩 늘린 s6l3s4l4s9r5t를 4단계의 거북 표현식으로 입력한 후 실행하였다. 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 고려하지 않았기 때문에 잘못된 패턴이 출력되었다.

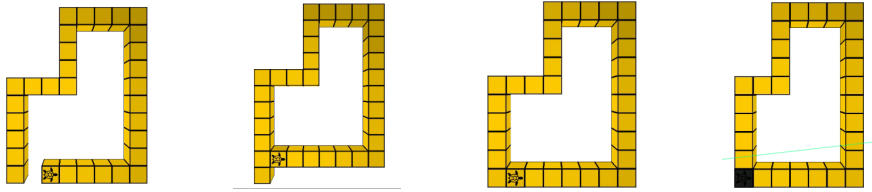
그러나 s8은 패턴을 전혀 응시하지 않고 거북 표현식의 조작을 통해 4단계를 만들려고 시도하였다. s8은 [그림 V-21]과 같이 10분 동안 10번



a. 3단계를 거북 표현식으로 나타낼 때의 안구 운동

b. 3단계 거북 표현식을 4단계로 확장할 때의 안구 운동

[그림 V-20] 거북 표현식의 적용 범위의 확장

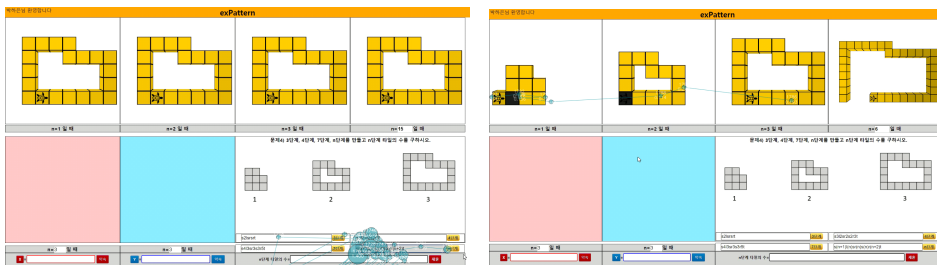


[그림 V -21] s8의 패턴 발견하기 활동에서 나타난 4단계의 일부

이상 거북 표현식을 수정하는 시행착오의 과정을 통해 간신히 4단계를 완성하였다.

s8은 다시 동일한 방식으로 7단계를 완성하였는데 s8이 4단계와 7단계의 거북 표현식을 시행착오 방식으로 구성하는 데에만 총 15분이 소요되었다. s8은 패턴의 구조를 이해하지 못하였기 때문에 이후에 n 단계 거북 표현식을 구할 수도 없었다.

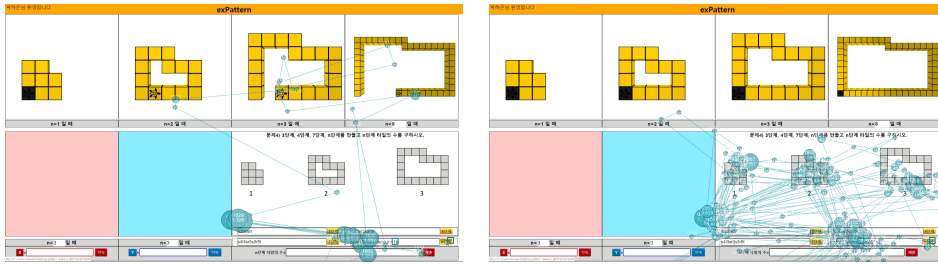
s5의 경우 검사 후반부에서 거북 표현식의 확장을 일종의 전략처럼 활용하는 모습을 보였다. 예를 들어 문제4에서 s5는 먼저 패턴을 보면서 3단계, 4단계, 7단계 입력 상자에 1단계, 2단계, 3단계의 거북 표현식을 각각 s2lsrtsrt, s3l2sr2s2r3t, s4l3sr3s3r5t 로 입력하였다. 그리고 [그림 V -22.a]와 같이 패턴은 보지 않은 채 주로 2단계 거북 표현식을 보면서 2만 n 으로 바꾸는 방식으로 n 단계 거북 표현식 $s(n+1)l(n)sr(n)s(n)r(n+2)t$ 을 구하였는데, 마지막 $(n+2)t$ 는 3단계 표현식에서 5t를 확장한 것이다. 이는



a. 표현식을 작성할 때의 안구 운동

b. 확장한 거북 표현식 실행 결과

[그림 V -22] s5의 거북 표현식의 확장과 실행



a. $n+2$ 를 $n+1$ 로 수정할 때의 안구

운동

b. $n+1$ 을 $2*n$ 으로 수정할 때의 안구

운동

[그림 V-23] s5가 다시 패턴을 관찰하게 되는 과정

연구 1의 일반화 행동 중 식의 확장에서 7을 n 으로 바꾸는 것과 동일한 범주의 것으로 해석할 수 있다. s5는 구조를 고려하지 않고 식의 외형만을 보고 확장했기 때문에 거북 표현식을 실행했을 때 아랫부분 [그림 V-22.b]와 같이 3단계를 제외한 다른 단계에서는 아랫부분이 겹치거나 연결이 끊어졌다.

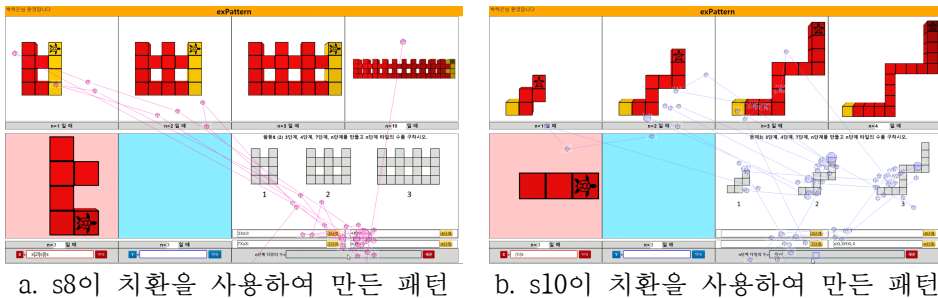
s5는 [그림 V-23.a]에서 볼 수 있듯이 출력 결과를 빠르게 한번 훑어본 뒤 다시 거북 표현식의 밑부분을 $(n+2)t$ 에서 $(n+1)t$ 로 변경하여 실행하였다. 이번에도 잘못된 결과가 출력되자 [그림 V-23.b]의 시선 흐름에서 알 수 있듯이 s5는 패턴을 자세히 관찰하기 시작하였다. s5는 우선 1단계와 2단계가 거북 표현식으로 잘 표현되었는지 확인한 후 1, 2, 3단계의 밑부분을 응시하면서 함수적 규칙을 찾았고 그 결과 거북 표현식의 밑부분을 $(n+1)t$ 에서 $(2*n)t$ 로 변경하였다. s5는 모든 단계에서 왼쪽 하단에 1개씩 타일이 겹치는 것을 발견하고 마지막으로 $(2*n-1)t$ 로 수정하여 거북 표현식을 완성하였다.

s5와 s8은 거북 표현식의 확장을 했다는 점에서는 동일했다. s8의 경우 패턴의 구조를 고려하지 않은 채 시행착오적인 방법으로 4단계를 찾아갔다. s8의 4단계 거북 표현식은 도형 패턴과는 단절된 것이었다. exPattern의 즉각적인 시각적 피드백은 의미있는 일반화 과정을 지원하지 못하였으며 단순히 추측을 빠르게 확인하는 도구로 활용되었다. 그에 비해 s5는 [그림 V-23.a]의 $(n+1)t$ 까지는 시행착오적으로 거북 표현식을

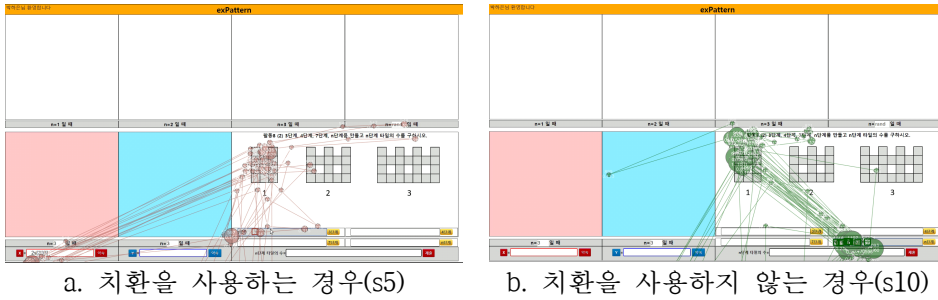
찾으려고 시도한 것이었지만 그 이후 $(2*n)t$ 부터는 시선 흐름에서 볼 수 있듯이 패턴으로 돌아가서 규칙성과 공통성을 찾고 거북 표현식을 가추해낸 것으로 볼 수 있다. 따라서 s5는 거북 표현식의 확장을 통해 구한 식을 다시 패턴과 연결될 수 있도록 수정하여 n 단계 거북 표현식을 구한 것이라 볼 수 있다.

치환의 사용

exPattern의 설계 과정에서 치환이 학생들이 반복되는 구조의 발견을 유도할 것으로 예상했다. 4명의 학생은 대부분 반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서는 치환을 사용하였지만 닳은꼴 성장패턴에서는 거의 치환을 사용하지 않았다. [그림 V-24.a]는 s8이 치환을 이용하여 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴을 만든 것이다. 학생들은 반복되는 부분을 X로 표현하고 $(n)X$ 와 같은 식으로 패턴을 생성하였다. 한편, [그림 V-24.b]는 s10이 W패턴을 치환을 이용하여 만든 것이다. $X=(n)s$ 로 치환한 후 sXLXRXLX로 패턴을 생성하였다. 그러나 s10 외의 다른 학생들은 치환 없이 닳은꼴 성장패턴을 만들었다. 다른 학생들은 $s(n)l(n+1)s(n)r(2*n)$ 와 같은 형식으로 n 단계 입력 상자에 표현식을 직접 입력하였다. 학생들에게 치환을 활용하여 닳은꼴 성장패턴을 만드는 것이 자연스럽지 않았던 것으로 판단된다. 실제로 [그림 V-24.b]와 같이 닳은꼴 성장패턴을 치환으로 만들기 위해서는 방향전환 문자인 L, R을 사용해야하는데 일반적으로 학생들은 거북이의 방향을 고정한 채 s, t, l, r을 사용하는 것보



[그림 V-24] 치환을 사용하여 패턴을 생성한 예

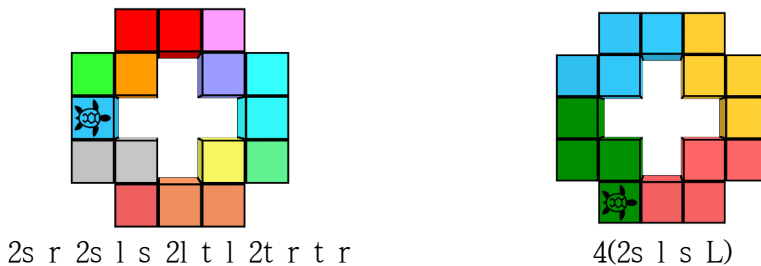


[그림 V-25] 치환을 사용하는 경우와 사용하지 않는 경우의 안구 운동

다 L, R을 사용하는 것을 더 어려워한다는 점이 작용했을 가능성이 있다.

반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서 학생들이 치환 문자를 사용했음에도 불구하고 치환 자체가 학생들이 반복되는 구조를 인식하도록 유도했는지 여부는 확인할 수 없었다. [그림 V-25.a]처럼 치환이 없이 동일한 패턴을 직접 $s[3l](n)(2s[2l[t]])$ 꼴로 만드는 경우도 있었는데 그때의 거북 표현식 작성 과정 및 안구 운동 패턴은 치환 문자를 쓸 때의 작성 과정 및 안구 운동 패턴([그림 V-25.b])과 본질적으로는 차이가 없었기 때문이다.

따라서 치환보다는 오히려 n 단계 거북 표현식이 “ $f(n)(\text{문자})$ ” 꼴들의 함으로 구성된다는 표현체계 자체의 특성이 학생들로 하여금 패턴에서 반복되는 부분을 찾도록 촉진하는 것일 가능성이 있다. [그림 V-26]은 공통수업의 로그데이터에서 반복을 도입한 후 s9가 사용한 거북 표현의 변화를 나타낸 것이다. 반복을 사용하기 전의 표현에서는 반복되는



[그림 V-26] 반복 도입 전과 후의 s9의 거북 표현식의 변화

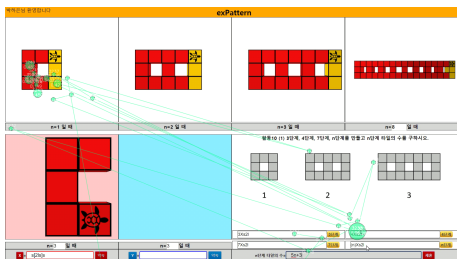
기본단위가 인식되지 않았다. 그러나 오른쪽 그림을 보면 s9가 반복을 사용하기 위해 패턴을 4개의 동일한 부분으로 분할하여 코드로 나타냈음을 알 수 있다.

2.2.2. 거북 표현식을 완성한 후 일반식을 구하는 과정

연구 1에서는 패턴을 상황적인 방법으로 그리더라도 일반식을 구하는데 어려움을 겪는 경우가 많았다. 연구 2의 중요한 관심 중 하나는 구조적 표현인 거북 표현식으로 임의의 n 단계 패턴을 만들 수 있다는 것이 곧 대수적으로 유의미한 방식으로 일반식을 구할 수 있음을 의미하는지 여부였다. 4명의 학생들이 n 단계 거북 표현식을 완성한 후 일반식을 구하는 과정을 분석함으로써 이에 대한 답을 찾고자 하였다.

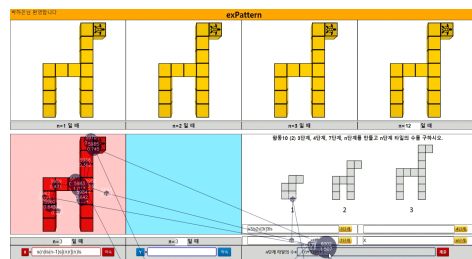
도형 패턴을 다시 보면서 일반식을 구하는 경우

대부분의 경우 학생들은 n 단계 거북 표현식을 완성한 후 다시 패턴을 관찰하면서 일반식을 적었다. [그림 V-27.a]는 s8이 거북 표현식을 완성한 직후부터 일반식을 쓸 때까지 약 14초의 시선 흐름이다. s8은 출력창의 1단계에서 반복되는 디글 부분의 타일의 수를 센 후에 일반식 $5n+3$ 을 썼는데 이 식의 형태는 s8이 거북 표현식으로 패턴을 구성한 방법과도 일치한다. 따라서 s8은 이미 거북 표현식을 나타내는 과정에서 n 단계에는 디글 부분이 n 개 있다는 구조를 이해하였기 때문에 타일의 수 5을



a. 일반식을 구할 때의 s8의 안구

운동



b. 일반식을 구할 때의 s9의 안구

운동

[그림 V-27] 패턴을 보면서 일반식을 구하는 사례

구한 뒤 바로 일반식을 쓸 수 있었던 것으로 판단된다.

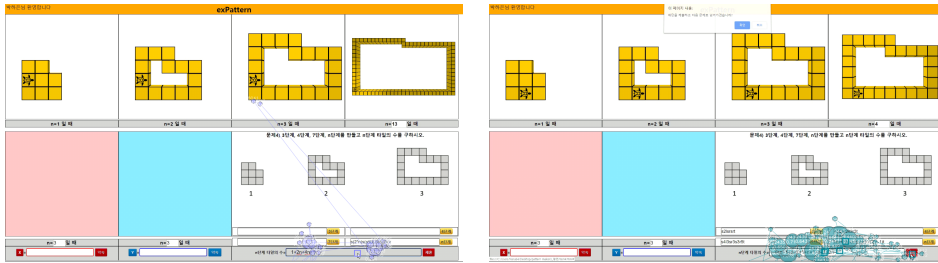
[그림 V-27.b]는 s9가 거북 표현식을 완성한 직후부터 일반식을 쓸 때까지 약 18초간의 시선 흐름이다. s9는 치환 창에 완성된 3단계 패턴의 왼쪽 다리를 보면서 먼저 $n+1$ 을 쓰고 난 후 몸통, 앞다리, 목을 응시하면서 $3n+1$ 을 썼다. 즉, 패턴을 $(n+1)+(n)+(n)+(n)+1$ 으로 분할하여 이해한 것인데 이 역시 거북 표현식 $s(n)l(n)s(n)r(n)ls$ 으로 패턴을 구성하는 방법에 대응되는 대수적 표현이라고 할 수 있다.

s8과 s9의 사례는 n 단계 거북 표현식을 작성하는 것이 대수적으로 유의미한 일반화를 가능하게 한다는 것을 보여준다.

거북 표현식을 일반식으로 변환하는 경우

일부 복잡한 패턴에서는 거북 표현식을 이용하여 일반식을 구하는 모습이 나타났다. 예를들어 [그림 V-28.a]는 s10이 거북 표현식을 완성한 후 일반식 구할 때까지 24초간의 시선 흐름이다. 안구 운동을 보면 s10은 패턴을 전혀 응시하지 않은 채 n 단계 거북 표현식을 읽으면서 일반식을 구하였다. 다음은 s10과의 회상자극면담 내용 중 일부이다.

- t: n 단계 코드랑 n 단계 타일의 수가 관련이 있을까 없을까?
s10: 관련이 있어요
t: 어떻게 관련이 있어?
s10: 코드에서 가는거 1개가 타일 1개자나요.
t: 그렇지, 그럼 코드보고 셀수도 있어?
s10: 코드 보고 셧어요.
t: 아 코드 보고 셧어? 그림보고 세지 않고?
s10: 아 이거(문제4)는 코드 보고 셧어요.
t: 코드 보고 어떻게 셧어?
s10: 이거 (n) 이 하나 둘 셋 넷 그렇게 1 하나 남은거 1개 해서 $4n+1$, 맨 앞에 $2n+1$
t: 아 그럼 이거는 코드보고 셧거야? 지금거는?
s10: 네



a. 거북 표현식으로부터 일반식을 구하는 안구 운동(s10)

b. 거북 표현식으로부터 일반식을 구하는 안구 운동(s5)

[그림 V-28] 거북 표현식을 이용하여 일반식을 구할 때의 시선 흐름

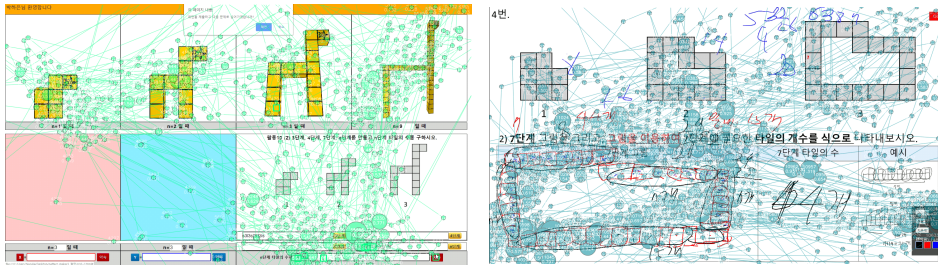
s10은 마지막 두 문제에서만 거북 표현식을 보고 일반식을 세웠다. 회상자극면담에서 알 수 있듯이 s10은 거북 표현식의 의미를 알고 있었기 때문에 거북 표현식으로부터 일반식을 구하는 방법을 이해하고 있었고 실제로 이를 활용하였다. s10은 마지막으로 2단계 패턴을 보면서 일반식을 검증하고 검사를 종료하였다.

한편, s5 역시 [그림 V-28.b]의 시선 흐름에서 볼 수 있듯이 패턴을 보지 않은 채 거북 표현식을 해석하면서 일반식을 구하였다. 그러나 s5는 거북 표현식을 일반식으로 변환하는 과정에서 실수를 하여 $6n+5$ 를 얻었고, 귀납적인 검증의 과정을 거치지 않았기 때문에 최종적으로 오답을 제출하게 되었다.

만약 거북 표현 일반식을 시행착오의 방법으로 구한 것이라면 이러한 일반식을 구하는 과정은 대수적으로 유의미한 패턴 일반화라 할 수 없다.

거북 표현식과 패턴, 대수적 표현 사이의 단절

s8의 경우 반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴의 패턴은 [그림 V-29.a]와 같이 다른 학생들과 유사한 과정으로 거북 표현식을 구하고 일반식을 구하는 모습을 보였다. 그러나 닭은꼴 성장패턴에 있어서는 앞에서 살펴본 바와 같이 거북 표현식의 조작을 이용한 패턴 발견하기에 집중하는 모습을 보였다. s8은 시행착오의 과정을 통해 4단계, 7단계의 거북 표현식을



a. s8이 일반식을 구할 때의 안구 운동

b. s8의 연구 1의 문제4에서의 안구 운동

[그림 V-29] 연구 1과 연구 2에서 s8가 일반화를 할 때의 안구 운동

구하고 다시 3단계 식에서 3만 n 으로 바꾸는 방식으로 n 단계 거북 표현식을 구하였다. [그림 V-29.b]는 s8이 n 단계 거북 표현식을 구한 후부터 일반식 $4n+2$ 를 구할 때까지 총 7분(420초) 간의 시선 흐름을 나타낸 것이다.

s8의 안구 운동을 보면 다른 학생들의 시선 흐름처럼 패턴의 중요한 부분에 응시가 집중되어 있기보다는 화면 전반에 걸쳐 고루 분포하고 있다는 것을 알 수 있다. 실제로 이러한 응시 분포는 s8이 연구 1에서 시행착오의 방법으로 문제4의 원 일반화를 할 때인 [그림 V-29.a]와 유사하다. 또한 연구 1에서 패턴 밖의 여백에 위치하는 응시들은 머릿속으로 수치적인 암산을 할 때 주로 나타났다는 것을 미루어 보았을 때 s8은 이번에도 수치적인 시행착오의 방법을 이용하여 $4n+2$ 를 구한 것으로 판단된다.

s8은 n 단계 거북 표현식을 구하였지만 이는 패턴의 구조와 단절된 것이었다. 따라서 패턴의 구조를 이해할 수도 없었으며 거북 표현식을 이용하여 일반식을 구할 수도 없었다. s8은 결국 연구 1과 동일하게 수치적인 시행착오의 과정으로 일반식을 구하였다. 이러한 사례는 도형 패턴, 거북 표현식, 일반식이 모두 서로 단절된 상태라 할 수 있다.

2.3. 연구 참여자의 변화

연구 2는 연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 낮았던 4명이 거북 표현식을 익히고 거북 표현식을 기반으로 하는 마이크로월드 exPattern에서 기초적인 반복패턴과 성장패턴을 만드는 활동 이후에 어떤 변화를 보이는지 살펴보고자 했다. <표 V-7>은 연구 2에서 4명의 연구 참여자의 패턴 일반화 수행 정도를 정리한 것이다. 특히 8(2), 10(1), 10(2), 10(3), 문제2, 문제3, 문제4는 공통수업이나 개별학습에서 다루지 않은 유형의 패턴이다.

<표 V-7> 연구 2에서 연구 참여자의 패턴 일반화 수행 정도

	8(1)	8(2)*	9(1)	9(2)	10(1)*	10(2)*	10(3)*	문제1	문제2*	문제3*	문제4*
s5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	□
s8	○	○	○	○	○	○	×	-	-	-	-
s9	○	○	△	○	○	○	○	○	○	○	○
s10	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

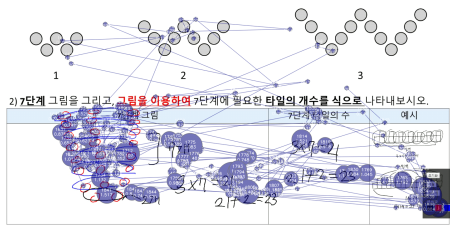
○: 정답, △: 교사의 개입, □: 거북 표현식은 맞았으나 일반식을 틀린 경우, ×: 오답, -:미설치

*:공통수업이나 개별수업에서 다루지 않은 유형

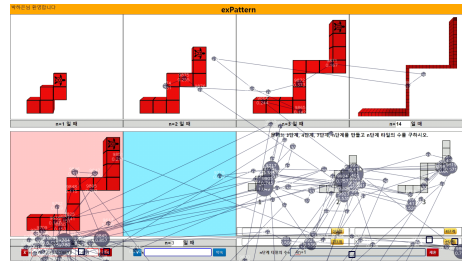
s8과 s9는 모든 문제를 완벽하게 해결하였고 s5의 경우 앞에서 살펴본 것과 같이 마지막 문제에서 거북 표현식을 바르게 구했으나 일반식을 구하는 과정에서 오류가 있었다. 질적인 측면에서도 이 3명은 모두 도형적 접근을 통한 대수적으로 유의미한 일반화를 하였다. 그러나 s8의 경우 반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서는 도형적 접근을 통해 일반화를 하였지만, 닭은꼴 성장패턴에서는 수치적인 시행착오로 일반식을 구하였다.

s5는 연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 가장 높았지만 수치적인 재귀적 접근을 많이 하는 학생이었다. exPattern을 이용한 활동에서도 [그림 V-11.a]와 같이 수치적인 접근으로 먼저 시작하거나 [그림 V-28.b]와 같이 거북 표현식의 확장만으로 일반식을 구하려고 시도하였지만, 거북 표현식의 특성에 의해 최종적으로는 패턴의 물리적 구조를 이용한 일반화를 하였다.

3번.



a. 연구 1의 문제3에서의 안구 운동

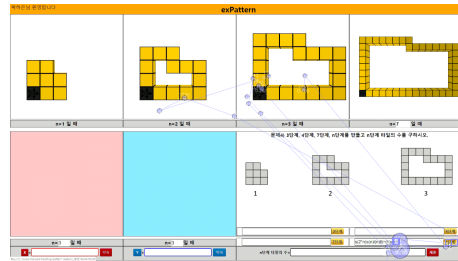
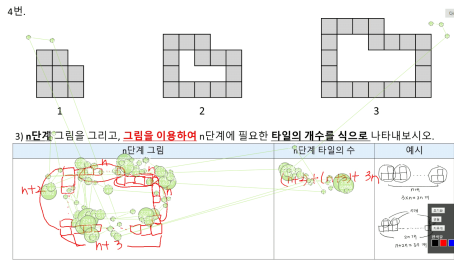


b. 연구 2의 문제3에서의 안구 운동

[그림 V-30] 연구 1과 연구 2에서의 s9의 안구 운동 비교

s9의 경우 연구 1에서 모든 문제의 일반화를 하지 못한 학생이었다. s9는 [그림 IV-48]와 같이 재귀적인 접근 기반의 차이 전략을 사용하거나 [그림 IV-42.a]와 같이 근 일반화 단계에서 패턴의 재귀적인 관계를 잘못 이해한 상태에서 귀납의 과정 없이 원 일반화나 기호적 일반화를 진행하였다. 예를 들어, [그림 V-30]은 연구 1에서의 s9의 안구 운동과 연구 2에서의 안구 운동을 비교한 것이다. [그림 V-30.a]는 문제3에서 7단계를 확장하고 패턴의 개수를 셀 때 s9의 안구 운동이다. 단계 사이의 변화를 검색하거나 패턴을 공간적으로 분할하는 행동과 관련된 안구 운동의 흔적을 발견할 수 없다. 전혀 다른 반복패턴을 그린 뒤에도 주어진 문제와 비교하는 귀납적인 과정이 없으며 자신이 그린 그림을 이용하여 $3 \times 7 + 2 = 23$ 이라는 결과를 얻는다. 그러나 [그림 V-30.b]의 연구 2에서는 패턴의 구조를 분석하는 단계 사이의 변화 검색, 패턴의 공간적 분할과 관련된 안구 운동이 나타난다. 거북 표현식으로 n 단계를 정확히 그렸으며 일반식 $4n+1$ 도 패턴의 구조를 응시하며 구했다. 연구 1에서는 귀납의 과정이 거의 보이지 않았지만 연구 2에서는 일반식을 구한 뒤 식의 대입을 통해 일반식을 검증하는 귀납의 과정이 나타났다.

s10의 경우 상황적 접근을 하였고 패턴의 분할 별로 산술 관계의 검색을 통해 함수적 규칙을 발견할 수 있는 학생이었음에도 불구하고 [그림 IV-45.a]와 같이 정확성이 떨어지는 데다가 귀납적 검증을 전혀 실행하지 않았기 때문에 실수나 오류가 수정되지 못하여 대부분의 일반화에 실패했던 학생이었다. 그러나 exPattern이 제공하는 시각적 피드백은 s10에



a. 연구 1의 문제4에서의 안구 운동

b. 연구 2의 문제4에서의 안구 운동

[그림 V-31] 연구 1과 연구 2에서의 s10의 안구 운동 비교

게 일반화의 오류 여부 및 오류에 대한 단서를 알려줌으로써 반성적 사고를 유도하고 오류를 수정할 수 있게 하였다. 예를 들어 [그림 V-31.a]는 연구 1의 문제4에서 s10이 자신이 그린 n 단계 그림의 각 분할 별로 함수적 규칙을 쓰고 다시 타일의 수를 구한 뒤 다음 버튼을 누를 때까지의 안구 운동이다. 단 한번도 패턴을 응시하지 않았기 때문에 밑변의 $n+3$ 은 수정될 수 없었다. [그림 V-31.b]는 연구 2의 문제4에서의 s10의 안구 운동이다. 이번에도 마지막 순간에 함수적 규칙에 실수가 있었지만 시각적 피드백으로 인해 이를 확인하고 다시 수정할 수 있었다. 뿐만 아니라 s10 역시 연구 2에서는 일반식을 검증하는 귀납의 과정도 나타났다.

s8의 경우 연구 1에서 단 한 문제의 일반식도 구하지 못하였다. 특히 s8은 재귀적 접근만을 사용하였으며 시행착오의 방법으로 7단계를 구하였으며 변수 n 의 의미도 이해하지 못하는 학생이었다. 개별학습에서 연구자는 s8에 대해서만 특별히 n 단계 타일의 수를 n 에 관한 식으로 나타낸다는 것의 의미를 설명했다. 구체적으로 n 에 1을 대입하면 1단계의 타일의 수가 나오고 3을 대입하면 3단계의 타일의 수가 나오는 식을 구해야 한다는 것을 이해시켰다. 이후 측정에서 s8은 [그림 V-27.a]와 같이 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에 대해서는 대수적으로 유의미한 일반화를 하는 모습을 보였다. 그러나 복잡도가 높은 닭은꼴 성장패턴인 10(2), 10(3)에서는 [그림 V-21]처럼 다시 연구 1과 유사한 수치 중심의 시행착오 과정에 집중하였다. s10은 10번 이상의 수정을 통해 4단계나 7단계의

거북 표현식을 추측과 확인을 반복하여 찾아가는 경험적 패턴 발견하기 (pattern-spotting) 활동에 빠졌고, 3단계 거북 표현식에서 3만 n 으로 바꾸는 방식으로 n 단계 거북 표현식을 구하였다. 이후에는 다시 패턴의 구조나 거북 표현식에 대한 고려 없이 패턴의 수치적인 측면에 집중하여 일반식을 구하려고 하였다. s10의 일반화 과정에서 도형 패턴, 거북 표현식, 대수적 표현은 모두 단절되어 있었다. 활동이 끝난 후 사후 인터뷰에서 s10에게 변수 n 의 의미에 대해 질문을 하였다. 다음은 관련된 면담 내용의 일부이다.

t: $(n)X$ 에서 n 은 어떤 역할을 해?

s8: 정해지지 않은 값

t: $(n)X$ 는 무슨 뜻이야?

s8: X 를 n 번 하면은 제곱?

t: 제곱?

s8: X 를 n 번 실행

t: 그렇지

s8은 $(n)X$ 가 exPattern의 맥락에서 갖는 조작적인 의미에 대해서는 이해하고 있었다. 그러나 변수 n 을 임의성을 갖는 변수가 아니라 미지수 개념에 해당하는 ‘정해지지 않은 값’으로 이해하고 있었다. s8은 2학년 1, 2학기 수학 성취도가 모두 A이고 시험 점수도 90점 이상이라고 하였으며 3학년 1학기 수학 성취도도 1점차로 B라고 하였다. 또한 고2 교육과정인 수열 단원을 선행 학습했다고 응답한 학생임에도 불구하고 도형 패턴을 구조적으로 전혀 바라보지 못하였으며 변수를 이용하여 일반성을 표현하지도 못하였다. s8의 사례는 거북 표현식을 이용한 exPattern에서의 활동이 긍정적인 방식으로 학생과 상호작용하지 않을 수 있음을 보여준다. 연구 1에서 보았듯이 패턴 일반화 과정은 개인의 사전지식과 경험에 따라 매우 다양한 양상으로 나타난다. s8의 경우 일반성의 표현 맥락에서 문자 n 의 의미를 제대로 이해하지 못한 학생이었다. 개별 학습에서 연구자가 일반식의 의미에 대해 예제 등을 이용하여 이해시키고자

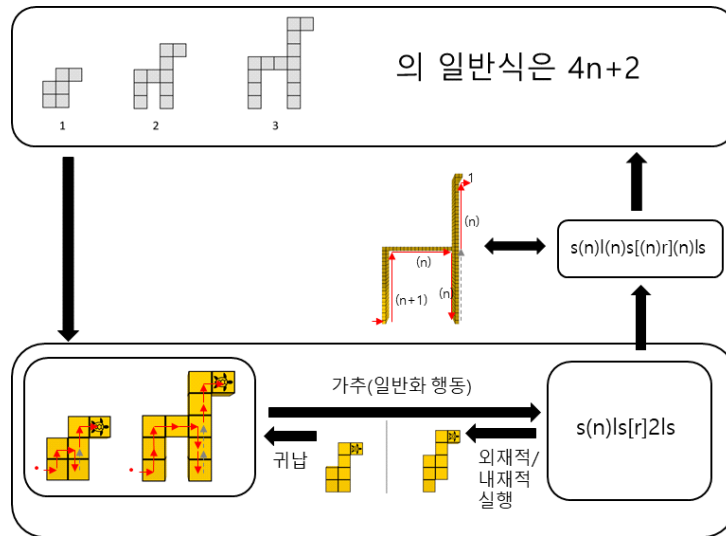
하였지만, 앞에서 살펴본 회상자극면담을 보면 여전히 변수 n 의 의미를 정확히 이해하지 못하였음을 확인할 수 있다. 또한 공통수업에 불참하였기 때문에 다른 3명의 학생보다 상대적으로 거북 표현식을 익히기 위한 기초 활동을 적게 수행했다는 점도 상호작용에 영향을 주었을 가능성이 있다.

3. 요약 및 논의

연구 2에서는 거북 표현식을 사용하는 마이크로월드에서의 패턴 일반화 과정을 분석하고 연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 낮았던 4명의 학생의 변화를 분석함으로써 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습의 가능성을 살펴보고자 하였다.

45분 4차시로 진행된 공통수업에서 연구 참여자들은 신체 동조성을 갖는 행동문자 s, t, l, r, L, R에 대해서는 빠르게 이해하고 사용할 수 있었다. 그러나 대괄호([,])의 의미나 변수 n 과 반복을 사용하는 문법에 관해서는 추가적인 개별학습이 진행된 후에야 익숙해졌다. 문법 이해도가 낮은 상태에서는 패턴 일반화 활동이 원활히 이루어지기 힘들었다. 따라서 거북 표현식을 활용한 패턴 활동을 하기 전에 기호 숙달을 위한 사전 활동을 충분히 수행할 필요가 있다. 특히 대괄호나 변수 문법의 학습에 주의 기울일 필요가 있으며, 문법적 틀이 블록 형태로 제공되는 코드의 도입을 통해 문법에 대한 인지적 부담을 감소시키는 방안도 생각할 수 있다.

도형 패턴을 거북 표현식으로 나타낼 때 거북이의 이동 방식에 따라 패턴을 관찰하는 학생들의 안구 운동을 확인할 수 있었다. 이는 이지운(2005)의 연구에서 거북 표현식으로 입체를 분석한 학생의 안구 운동 패턴과 유사한 형태였다. 주어진 3개의 사례를 길이는 다르지만 전체적으로 동일한 형태의 이동 경로로 해석하는 과정으로부터 패턴이 분할되고 구조가 발견되는 장면이 나타났다. 즉, 거북 표현은 학생들이 대수적으로 유의미한 방식으로 패턴을 분할할 수 있도록 도왔다. 이는 어떤 대상에 대한 인지 작용은 그것을 나타내는 상징체계에 따라 달라진다는 선행연구의 주장(Golzalez & Kolers, 1982; Lakoff & Johnson, 1980)의 구체적인 예가 될 수 있다. 그러나 학생이 패턴의 구조를 자신만의 방식으로 해석한 후 거북 표현식으로 나타내는 경우에는 거북이의 이동 방식의 제한으로 인해 추가적인 변환 과정이 필요했다. 거북 표현이 모든 분할 방법을 나타낼 수 없기 때문이다. 또한 닭은꼴 성장패턴의 경우 4명의 학



[그림 V-32] exPattern에서의 패턴 일반화 과정

생이 모두 동일한 방법으로 패턴을 분할하였는데 이는 거북 은유의 제한에 의한 것으로 판단된다. 따라서 동일한 패턴에 대한 다양한 대수적 표현 사이의 동치 관계의 탐구에 대해서는 거북 표현식을 이용한 활동이 효과적이지 않을 수 있다.

학생들 exPattern에서의 일반화 과정은 [그림 V-32]와 같았다. 학생들은 먼저 연구 1의 지필 환경에서 사용하였던 것과 유사하게 단계 사이의 변화 검색, 패턴의 공간적 분할, 단계 중심의 산술적 관계 검색 등의 행동을 시도하며 n 단계 거북 표현식을 가추하여 작성하였다. 거북 표현식을 실행한 후 출력 창과 문제를 비교하는 귀납의 과정을 거친 후 일치하지 않는 부분이 존재하면 다시 규칙을 수정하였다. 구조를 표현하는 외재적 기호인 거북 표현식이 문제와 함께 한 화면에 함께 존재함으로써 학생들은 이 두 대상을 직접 비교하고 조작하며 패턴을 일반화할 수 있었다.

학생들이 문제→거북 표현식 조작→문제→거북 표현식 조작→문제→...와 같이 순차적으로 거북 표현식을 조작하면서 패턴의 구조를 일반화하는 과정은 Davis(1984)의 VMS sequence(visually-moderated sequence) 개념으로 설명할 수 있다. 거북 표현식은 학생 자신이 현재 패턴의 어떤

부분까지 일반화했는지 알려주며 그 다음에 일반화해야 할 부분이 어떤 부분인지를 안내하는 시각적 단서를 제공함으로써 패턴 일반화 절차의 체계적 수행을 지원하는 것으로 판단된다. 학생들은 거북 표현식을 통해 추상적인 일반화 과정을 절차적이고 조작적으로 접근할 수 있었다. Rivera(2010a)는 패턴의 분할을 돕고 일반화 과정에서의 VMS sequence 역할을 하는 도식으로 시각적 템플릿 개념을 제시하였다. 그러나 그는 시각적 템플릿의 존재성과 속성에 대한 연구는 하였지만 그것의 학습 방법에 대해서는 제시한 바가 없었다. 거북 은유가 내재된 거북 표현식은 시각적 템플릿과 유사한 역할을 하면서 학습 가능한 인지 전략이라는 측면에서 교육적으로 의미가 있다.

한편, 학생들이 거북 표현식을 외부적으로 실행하지 않고 단지 응시하면서 문제의 패턴과 비교하고 표현식을 조작할 때의 응시 패턴, 거북 표현식을 읽으면서 일반식을 구할 때의 안구 운동, 사후 인터뷰에서 “여기를 2번 갔다가 내려간거예요”와 같은 발화는 거북 표현식이 학생들의 내면에서 실행된다는 것에 대한 외부적 증거로 볼 수 있다. 이는 조한혁, 송민호(2014)의 주장처럼 거북 표현식이 학습자의 내면에서 실행(executable)되어 약속된 현상을 제시할 수 있음을 의미한다.

한편, 많은 연구자들이 반성적 사고가 일반화 과정의 초석임을 강조하였다(Amit & Neria, 2008; Dörfler 1991; Ellis 2007; Harel & Tall, 1991). 거북 표현식을 실행했을 때 exPattern이 출력하는 4개의 단계(1단계, 2단계, 3단계, 무작위 단계)는 즉각적인 시각적 피드백으로 학생들이 자신의 일반화를 귀납적으로 검증하고 새롭게 규칙을 가추할 수 있는 반성의 기회를 제공하였다. 학생들은 출력 창에 나타나는 시각적 결함(음영, 틀어짐)이나 문제와 일치하지 않는 부분에 집중하면서 잘못된 부분을 찾아 거북 표현식을 수정하였다. 연구 1에서 반성을 전혀 하지 않던 학생들은 시각적 피드백으로 인해 오류를 인식하고 반성의 단계로 진입할 수 있었다. 이는 거북 표현식 기반의 마이크로월드에서 즉각적인 시각적 피드백이 학생 자신의 구성물에 대한 반성의 기회를 제공한다는 선행연구의 결과와 일치한다(조한혁, 송민호, 2014; Cho et al., 2010; Cho et al., 2012;

Cho et al., 2016).

학생들은 exPattern에서의 활동시간이 증가할수록 실제 실행을 하지 않고 거북 표현식과 패턴만 응시하면서 거북 표현식을 수정해나가는 모습이 나타났다. 즉, 거북 표현식↔외적인 실행 결과↔문제 사이의 가추 귀납적 과정이 거북 표현식↔(내적인 실행 결과)↔문제 사이의 가추 귀납적 과정으로 내면화되었다. 앞에서 살펴본 것과 같이 exPattern의 거북 표현식은 패턴의 분할과 공통 구조의 발견을 도움으로써 함수적 규칙을 가추하는 데 기여하며, 시각적 피드백은 일반화에 대한 반성적 사고를 유도한다. 즉, exPattern은 시각적 추론을 기반으로 하는 가추 단계와 귀납 단계의 순환에 의한 패턴 일반화 과정을 유도하는데, 학생들은 exPattern에서의 활동이 반복되면서 실제로 실행 버튼을 눌러 시각적 출력을 확인하는 절차가 없이도 이러한 일반화 과정을 수행할 수 있게 된 것이다. exPattern의 사용이 내면화 되면서 거북 은유를 사용하여 도형 패턴을 일반화하는 전략과 함께 도형 패턴의 일반화의 초석이 되는 패턴의 공간적 분할, 단계 중심의 산술 관계의 검색과 같은 행동을 바탕으로 하는 가추-귀납적 과정의 발달이 진행되었다고 볼 수 있다. 실제로 도형적인 접근을 하지 못하던 s5, s9나 반성적 절차를 수행하지 못하던 s10은 exPattern에서 대수적으로 유의미한 일반화 활동을 하였다. 따라서 exPattern은 대수적으로 유의미한 패턴 일반화 행동을 매개하는 도구 (instrument)(Drijvers & Gravemeijer, 2005)로 볼 수 있으며 exPattern의 이중적 기능은 비고츠키의 기술적 도구(technical tools)의 내면화를 통한 심리적 도구(psychological tools)로의 변환(Mariotti, 2002)으로도 해석할 수 있다.

일부 학생들은 패턴의 1단계, 2단계, 3단계 중 일부를 거북 표현식으로 나타낸 후 거북 표현식의 외형을 기반으로 n 단계 거북 표현식을 구하는 경우가 있었다. 이렇게 확장된 n 단계 거북 표현식은 이후 도형 패턴과 연결된 가추-귀납적인 과정을 통해 바람직한 일반화로 이어지는 경우도 있었지만 경험적 패턴 발견하기 활동으로 이어지기도 하였다. 이러한 패턴 발견하기는 거북 표현식의 숫자나 함수적 규칙을 시행착오적으로 수

정하면서 출력 결과가 문제와 동일해질 때까지 반복한다는 점에서 선행 연구에 나타난 수치 기반의 추측과 확인 전략(Krebs, 2003; Lannin, 2003; Rivera, 2007)과 동일하며 exPattern의 즉각적인 시각적 피드백이 오히려 이러한 추측과 확인 전략을 빠르게 수행하도록 도왔다.

한편, 학생들은 반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서는 치환을 사용하였지만 닳은꼴 성장패턴에서는 거의 사용하지 않았다. 많은 문자 명령을 압축할 수 있는 치환의 효과를 보고한 선행연구(조한혁, 송민호, 2014; Cho et al., 2016) 역시 모두 규모가 큰 건축물에서 반복되는 부분을 치환하는 맥락이었다는 점을 보았을 때, n 에 따라 성장하는 함수적 관계가 포함된 치환은 학생들에게 자연스럽게 않은 것으로 판단된다. 치환 자체가 반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴이 아닌 성장패턴의 일반화에 있어서 구조의 발견을 촉진하는지는 확인할 수 없었다.

대부분의 문제에서 학생들은 n 단계 거북 표현식을 완성한 후 다시 패턴을 관찰하면서 일반식을 적었다. 그 과정에서의 안구 운동 패턴과 일반식의 형태는 거북 표현식의 구성 과정과 일치하였다. 따라서 n 단계를 거북 표현식으로 표현하는 과정은 대수적으로 유의미한 일반화를 가능하게 한다는 것을 보여준다. 한편, 일부 복잡한 패턴에서는 거북 표현식을 읽으면서 일반식을 도출하는 안구 운동 패턴이 나타나기도 하였다. s8의 경우 닳은꼴 성장패턴 문제에서는 시행착오를 통해 4단계, 7단계, 그리고 n 단계 거북 표현식을 구하였다. s8의 거북 표현식은 도형 패턴과 단절된 상태였기 때문에 이를 일반식을 구하는 데 사용할 수 없었다. s8은 오랜 시간을 투자하여 다시 수치적인 방법으로 일반식을 구하였다.

연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 낮았던 4명의 학생의 exPattern에서의 일반화 과정이 질적으로 변화했음을 안구 운동 패턴을 통해 확인할 수 있었다. 재귀적 접근을 주로 했던 학생들은 모두 함수적 접근을 하였다. 이는 거북 표현체계의 형식이 재귀적 접근을 지원하지 않았기 때문으로 볼 수 있다. 또한 s8을 제외한 3명의 학생은 모두 도형적 접근을 통해 패턴을 일반화하였다. 특히 연구 1에서 패턴의 거의 관찰하지 않고 수치적 접근만을 하던 s9는 exPattern에서 패턴의 공간적 분할, 단

계 사이의 변화 검색 등의 행동을 통해 도형적 추론을 하였다. 이는 패턴을 구성하는 유일한 방법이 패턴의 구성요소와 연결된 상징적 표현을 함수적으로 사용하는 것뿐인 마이크로월드의 제약이 도형적 추론을 기반으로 하는 일반화를 유도했던 Noss et al.(1997)의 결과와 일치한다. 또한 연구 1에서 귀납적 검증이 전혀 없던 s8과 s9는 거북 표현식과 exPattern의 시각적 피드백을 이용하여 귀납을 수행하였다. 그러나 s8의 경우 반복패턴이나 A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에 대해서는 대수적으로 유의미한 일반화를 할 수 있었지만 님은꼴 성장패턴에 대해서는 여전히 연구 1과 동일한 수준의 수치적 접근의 추측과 확인을 통한 일반화를 하였다. s8의 경우 다른 3명의 학생과 달리 변수 n 에 대한 이해가 부족했고 거북 표현식을 학습하는 시간이 상대적으로 적었다는 점이 이러한 부정적인 상호작용에 영향을 주었을 가능성이 있다.

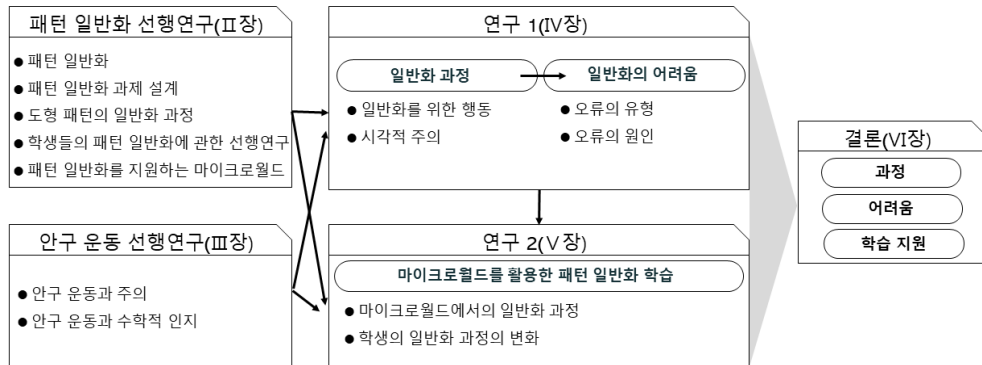
Moss & Beaty (2006)는 일반화의 어려움의 근원은 일반화 문제 자체에 있는 것이 아니라, 문제를 제시하는 방식과 교수법의 제약에 있다고 하였다. exPattern은 학생들에게 Mavrikis et al.(2012)가 강조한 “패턴의 구조를 인식하고 구조의 힘을 느낄 수 있는 경험”을 제공했다고 볼 수 있으며 새로운 표현체계와 마이크로월드를 이용하여 대수적으로 유의미한 패턴 일반화 과정을 일종의 학습 가능한 수학(learnable mathematics)(Kaput, Noss, & Hoyles, 2002)으로 구성한 사례로 볼 수 있다.

VI. 결론

1. 요약

도형 패턴의 일반화는 물리적 구조를 이용하여 대수적 표현을 구하고 정당화할 때 대수적으로 의미 있는 활동이 될 수 있다. 그러나 학생들에게 도형적 추론을 통한 패턴 일반화는 쉽지 않은 과정이며, 학생들은 패턴을 수치적 수열로 변환한 뒤 규칙을 찾는 구조가 배제된 패턴 발견하기에 집중하는 경우가 많다. 대부분의 선행연구는 학생들의 일반화 결과를 토대로 해결 전략의 유형이나 옳고 그름에 관한 문제를 주로 다루었을 뿐 일반화 과정 자체에 초점을 둔 연구는 상대적으로 부족하다. 따라서 학생들이 도형 패턴을 일반화하는 과정에서 어떤 추론을 사용하고 어떤 행동을 시도하는지 분석할 필요성이 제기되며, 일반화 과정에서 겪는 어려움의 유형과 원인이나 학습 지원 방안에 관한 연구도 필요하다. 이러한 문제에 초점을 둔 연구는 도형 패턴을 활용한 대수적 사고의 개발에 관한 교육적 시사점을 제공해줄 수 있을 것이다.

이에 본 연구는 두 가지 연구를 수행하였는데 먼저 연구 1에서는 도형 패턴을 일반화하는 과정에서 학생들이 시도하는 다양한 행동과 어려움에 대해 분석하였다. 연구 2에서는 거북 표현식을 표현체계로 하는 마이크로월드에서 학생들의 일반화 과정을 분석함으로써 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화 학습의 가능성을 탐색하고자 하였다. 연구방법에 있어서는 패턴 일반화 과정에서 학생들의 행동, 어려움 및 마이크로월드와의 상호작용을 자세히 분석하기 위하여 안구 운동 자료를 회상자극면담 내용, 필기 등의 전통적인 자료와 함께 상호보완적으로 분석하였다. 본 논문의 전체적인 구조와 각 장의 역할은 [그림 VI-1]과 같다.



[그림 VI-1] 논문의 전체적인 구조

1.1. 연구 1

연구 1에서는 4개의 서로 다른 유형의 선형 패턴 과제를 통해 18명의 중학교 3학년 중상위권 학생들의 도형 패턴 일반화 과정을 분석하였다. 연구의 목적에 따라 학생들의 도형적 추론을 최대한 유도하기 위하여 과제의 문항을 1) 4단계를 그리기 2) 7단계를 그리고 타일의 수를 식으로 나타내기 3) n 단계를 그리고 타일의 수를 식으로 나타내기로 구성하였다. 종이 위에 문제를 풀 듯 모니터 화면에 직접 펜 태블릿으로 필기를 하면서 패턴을 일반화할 수 있는 자극 제시 프로그램을 설계하여 학생들의 문제 해결 과정과 안구 운동을 측정하였다. 아이트래커 측정이 끝난 직후 안구 운동이 동기화된 문제 해결 영상을 이용한 회상자극면담을 통해 일반화 과정에 대한 학생의 자기보고 자료를 수집하였다. 과제의 특성, 회상자극면담, 필기 내용, 마우스 커서의 이동, 전후의 안구 운동을 고려하여 안구 운동으로부터 학습자의 내적 처리 과정을 추론하였고 이를 토대로 도형 패턴의 일반화 과정에서 학생들의 행동 및 오류의 유형과 원인을 분석하였다. 또한 안구 운동 지표에 대한 양적 분석을 통해 학생들의 시각적 주의의 특성에 대해 분석하였다. 이러한 연구방법을 통해 신경생리학적 자료를 근거로 선행연구의 결과를 확인하고 확장할 수 있었다.

연구 1의 주요 연구 내용 및 결과는 다음과 같다.

첫째, 학생들의 패턴 일반화 수행 내용을 분석하였다. 18명 중 14명의 학생이 도형적 접근을 중점적으로 활용하였다. 이는 수치적 접근의 비중이 높았던 선행연구들의 결과와 상반되는 것으로(Becker & Rivera, 2005; El Mouhayar & Jurdak, 2016) 본 연구에서 각 단계를 그리고 그림에 개수를 표시하여 타일의 수를 세도록 요구하는 형태의 새로운 질문 구성이 학생들의 도형적 추론을 유도한 것으로 판단된다. 도형적 접근을 통해 일반식을 구한 학생들이 패턴의 구조를 해석하는 방법을 분석한 결과 선행연구와 마찬가지로 대부분 구성적 일반화에 해당하였다(English & Warren, 1998; Rivera & Becker, 2008). 그러나 학생들이 처음부터 패턴을 겹치지 않게 분할하는 것은 아니었다. 패턴에 관한 규칙을 가추하는 단계에서 일반화를 위한 행동을 수행할 때에는 겹치는 부분이 존재하는 분할을 사용하였지만, 마지막에 일반식으로 표현하는 과정에서 구성적으로 변경하는 경우가 많았다. 학생들은 겹치는 부분의 계산을 비효율적이라고 생각하는 경향이 있었으며, 이러한 효율성에 대한 욕구가 패턴의 구조와 대수적 표현 사이의 연결 방식을 결정하는 데 영향을 준 것으로 해석할 수 있다.

둘째, 학생들이 도형 패턴을 일반화하기 위해 시도하는 행동의 유형을 분류하고 분석하였다. 학생들은 제시된 사례로부터 일반적인 규칙에 대한 가설을 생성하는 과정에서 가추를 사용하였고, 가설을 검증하기 위해 귀납을 사용하였다. Rivera & Becker(2007)의 주장처럼 패턴 일반화 과정은 가추 단계와 귀납 단계의 반복으로 설명할 수 있었는데, 그 과정에서 <표 VI-1>와 같은 다양한 유형의 행동을 하였다. 이러한 행동들은 정신적인 특성에 따라 Ellis(2007)의 일반화 행동 범주로 분류할 수 있었다. 10개의 행동 중 패턴의 공간적 분할, 단계 사이의 변화 검색, 단계 중심의 산술적 관계 검색, 패턴 내 요소 사이의 대응은 가추 단계와 귀납 단계에서 가설의 생성과 검증에 기여하는 중요한 행동으로 확인되었다.

학생들의 일반화를 위한 행동들은 서로 밀접하게 연관되어 상호작용하며 동시에 나타나기도 하였다([그림 VI-60] 참조). 특히 패턴에 대한 분할이 선행되어야만 단계 사이의 변화 검색, 산술적 관계의 검색과 같

<표 VI-1> 연구 1에서 확인된 10개의 행동과 범주

범주	일반화 행동	설명
관계맺기	패턴 내 요소 사이의 대응	패턴의 개별 도형을 구성하는 요소 사이의 유사성, 반복성 및 대응 관계를 형성하는 행동
	이전 문제와의 관계	이전에 일반화했던 패턴과 유사한 특성을 갖는 패턴이 제시되었을 때 이전의 패턴에서 성공적으로 사용하였던 일반화 방법을 새로운 패턴에 적용하는 행동
검색하기	패턴의 공간적 분할	패턴을 방향, 기하적 특성 등 일정한 기준으로 분할하는 행동
	단계 중심의 산술적 관계 검색	단계의 수와 패턴의 수량적 측면 사이의 산술적 관계를 확인하는 행동
	단계 사이의 변화 검색	패턴의 연속된 단계를 반복적으로 비교하여 공통적인 특성, 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 확인하는 행동
	식의 값 검색	일반식의 n 에 숫자를 대입했을 때의 값이 실제로 해당 단계의 타일을 센 결과와 동일한지 확인하는 행동
확장하기	패턴의 확장	도형 패턴을 직접 그려서 사례를 확장하는 행동
	패턴을 그리는 방법의 확장	작은 단계를 확장할 때 사용한 절차를 더 큰 단계의 확장에 적용하는 행동
	식의 확장	특정 단계에서 단계의 수를 중심으로 표현한 계산식에서 단계의 수를 변수 n 으로 바꾸어 일반식을 생성하는 행동
	재귀적 수치의 확장	재귀적인 관계를 이용하여 수열을 확장하는 행동

은 행동들이 정확하게 수행될 수 있었고 단계 중심의 산술적 관계 검색은 각 분할의 함수적 규칙을 가추하고 귀납하는 과정에서 핵심적인 행동이었다. 동일한 문제에 대해서 학생마다 서로 다른 행동을 하였으며, 한 학생이 문제에 따라 서로 다른 행동을 하였다. 즉, 패턴의 유형과 개인의 사전지식에 따라 패턴을 일반화하기 위한 행동이 다양하게 나타났다. 이러한 분석은 단순히 행동을 분류하는 데 그치지 않고 행동 사이의 상호작용과 가추 단계, 귀납 단계에서의 역할을 분석했다는 점에서 신경생리학적 분석을 통해 Rivera(2010a)와 Ellis(2007)의 연구를 확인하고 확장

했다는 의의가 있다.

셋째, 도형 패턴 일반화 과제에서 학생들의 시각적 주의의 양상을 분석하였다. 학생들은 근 일반화 문항을 가장 빨리 해결하였으며 기호적 일반화 문항보다 원 일반화 문항을 해결하는 데 더 많은 시간을 사용하였다. 이는 대부분의 학생들이 원 일반화 문항에서 7단계를 그리거나 타일의 수를 구하는 과정에서 단계와 패턴 사이의 함수적 관계를 가추하고 귀납하는 일반화를 시도하였기 때문이다. 또한 대체로 원 일반화 문항보다 근 일반화 문항의 전체 전환횟수가 많았는데, 4단계에서 패턴의 공통적인 특성과 성장방법을 파악하기 위해 단계 사이의 변화 검색을 하는 과정에서 단계 사이의 주의 전환이 빠르게 자주 일어났기 때문이다.

패턴의 구조에 따라 시각적 정보의 활용 양상이 달랐다. 학생들은 닭은꼴 성장패턴에서는 2단계와 3단계를 주로 응시하며 일반화를 하였고, A, AB, ABB, ... 꼴 패턴에서는 1단계를 2, 3단계보다 더 많이 보면서 일반화를 하였다. 패턴의 단계를 비교할 때는 1단계와 2단계, 2단계와 3단계와 같이 연속된 단계 사이의 변화를 주로 관찰하였다.

전체 응시 중 74%가 쓰기 영역에 속하였으며, 단계 사이의 전환횟수보다 단계와 쓰기 영역 간의 전환횟수가 2배 이상 많았다. 학생들이 패턴의 규칙을 완벽히 파악한 후 그림을 그리거나 식을 쓰는 것이 아니라 분할 별로 가추와 귀납 단계를 반복하면서 그림을 그리거나 규칙을 찾기 때문에 일반화 과정 전반에 걸쳐 각 단계와 쓰기 영역 간의 시선 전환이 계속 이루어지는 것으로 해석할 수 있다.

넷째, 도형 패턴 일반화에서 오류의 유형과 원인을 분석하였다. 연구 참여자들은 문자와 식, 일차함수를 모두 학습한 중학교 3학년 중상위권 학생임에도 불구하고 문제별로 약 25% 정도가 일반화에 어려움을 겪었다. 주요 오류의 유형에는 관계의 이해에 대한 오류, 산술적으로 표현하는 과정에서의 오류, 확장 과정에서의 오류가 있었으며 절차상의 오류나, 수치 중심적 사고에 의한 오류, 변수에 대한 이해 부족에서 오는 오류 등도 나타났다. 이러한 오류가 발생하는 인지적 요인은 크게 다음과 같이 6가지로 확인할 수 있었다.

- 패턴의 물리적 구조에 대한 부정확한 지각
- 일관성 없는 패턴의 분할의 사용
- 포함-배제 원리 도식의 부재
- 패턴과 단절된 규칙의 확장
- 변수 개념에 대한 이해의 부족
- 귀납적 검증의 미 실시

패턴의 일부분에만 주의를 기울이거나 단계 사이의 변화를 충분히 관찰하지 않는 경우 패턴의 공통적인 특성이나 변화하고 유지되는 부분을 정확히 이해하지 못하여 잘못된 규칙의 도출로 이어졌다. 패턴을 분할하는 기준을 일정하게 유지하지 못하는 학생은 일반화를 위한 행동을 정확하게 수행하지 못하였고 이는 관계 이해의 오류나 패턴의 구조를 산술적으로 표현하는 과정에서의 오류로 이어졌다. 이는 패턴 일반화에 있어서 대수적으로 유용한 구조를 인식하는 능력(Lee, 1996; Stacy, 1989)뿐 아니라 구조에 대한 관점을 일정하게 유지하는 능력도 중요함을 의미한다. 또한 패턴에 대한 상황적(contextual) 구조를 이해했다고 하더라도 대수적 표현을 즉각적으로 도출할 수 있는 것은 아니었다. 많은 학생들이 겹치는 타일의 수를 처리하는 포함-배제 원리 도식의 부재로 계산상의 어려움을 겪었으며 분할을 겹치지 않게 조정하다가 오류를 범하기도 하였다. 패턴과 단절된 불확실한 규칙의 적용 범위를 물리적으로 확장함으로써 잘못된 규칙을 얻는 경우도 많았다. 또한 변수 개념에 대한 이해가 부족한 학생은 문자 n 을 이용하여 일반식을 표현하지 못하였다. 이러한 모든 오류는 귀납적 검증 과정을 통해 발견되고 수정될 수 있음에도 불구하고 잘못된 일반화를 한 학생들은 대부분 귀납 단계를 실행하지 않았다. 즉, 선행연구의 주장처럼 일반화에서 반성적 과정이 중요함을 알 수 있다(Amit & Neria, 2008; Harel & Tall, 1991). 대부분의 선행연구가 학생들이 어떤 잘못된 ‘전략’의 사용으로 일반화에 실패하는지에 집중하였던 반면, 본 연구에서는 도형적 접근을 시도했음에도 불구하고 학생들이 일반화에 실패하게 되는 원인을 인지적인 차원에서 분석했다는 점에

서 의의가 있다.

1.2. 연구 2

연구 2에서는 패턴에 대한 조작과 상징적 표현 사이의 시각적 연결을 통해 학생들의 대수적 사고를 촉진하고자 하였던 구성주의 (constructionism) 기반의 선행연구를 바탕으로 거북 표현식을 사용하는 마이크로월드 exPattern을 설계하였다(Mavrikis et al., 2012; Noss et al., 1997; Noss et al., 2009). 공통수업과 개별수업을 통해 연구 1에서 패턴 일반화 수행 정도가 낮았던 4명의 학생에게 거북 표현식을 학습시킨 후 exPattern에서의 패턴 일반화 과정을 분석하였다. 구조적 표현인 거북 표현식 기반의 마이크로월드와의 상호작용이 학생들의 패턴 일반화 과정에 어떤 영향을 미치는지에 초점을 두고 분석을 하였다. 주요 연구내용 및 결과는 다음과 같다.

첫째, 거북 표현식은 패턴의 분할을 돕고 일반화 절차의 체계적 수행을 지원하였다. 학생들은 거북이의 이동경로를 따라 패턴을 응시하였는데, 주어진 3개의 사례를 길이는 다르지만 전체적으로 동일한 형태의 이동 경로로 구성하는 과정으로부터 패턴이 분할되고 구조가 발견되는 장면이 나타났다. 거북 표현식의 거북 은유는 함수적 관계로 연결될 수 있는, 즉 대수적으로 유용한 구조로 패턴을 분할하는 것을 도왔다. 그러나 패턴의 구조를 자신만의 방식으로 해석한 후 거북 표현식으로 나타내는 경우 거북이의 이동 방식의 제한으로 인해 추가적인 변환 과정이 필요하기도 하였다. 또 이러한 이동 방식의 제한이 다양한 대수적 표현의 출현을 어렵게 하는 한계가 있음을 확인하였다.

한편, 학생들은 exPattern에서 연구 1의 지필 환경에서 나타났던 단계 사이의 변화 검색, 패턴 내 요소 사이의 대응, 단계 중심의 산술적 관계 검색 등의 행동을 통해 n 단계 거북 표현식을 가추하여 작성하였고 거북 표현식의 실행 결과와 문제를 비교하면서 귀납적 검증을 하였다. 학생들은 화면에 외재적 기호 형태로 존재하는 거북 표현식을 문제 또는 출력 결과와 반복적으로 비교하고 조작하면서 일반화를 하였다. 즉, 거북 표

현식은 마치 Davis(1984)의 VMS sequence와 같은 역할을 하는 도식으로써 학생들이 추상적인 일반화 과정을 절차적이고 조작적으로 접근할 수 있도록 지원하였다. 거북 표현식은 Rivera(2010a)의 시각적 템플릿과 같은 이정표 역할을 하는 학습 가능한 인지 전략이라는 점에서 의의를 갖는다.

둘째, exPattern의 시각적 피드백은 학생들이 자신의 일반화를 귀납적으로 검증하고 새롭게 규칙을 가추할 수 있는 반성의 기회를 제공하였다. exPattern은 거북 표현식에 따라 1, 2, 3단계를 연속으로 출력하며 4 이상의 큰 단계 중 하나를 무작위로 출력하도록 설계되었다. 학생들은 문제와 출력창을 직접 비교하면서 일반화를 검증하였으며 음영(타일의 겹침), 틀어짐 등의 시각적 단서를 바탕으로 자신의 일반화를 수정하였다. 시각적 피드백은 연구 1에서 귀납적 검증을 전혀 하지 않던 학생들도 자신의 오류를 인지하고 반성적 사고를 할 수 있도록 유도함으로써 가추-귀납 단계의 순환을 유도하는 데 기여하였다.

셋째, n 단계를 거북 표현식으로 나타낸 학생들은 패턴의 구조를 이해할 수 있었다. 대부분의 문제에서 학생들은 n 단계 거북 표현식을 완성한 후 다시 패턴을 관찰하면서 일반식을 구하였는데, 이때 패턴을 분해하는 안구 운동과 일반식의 형태는 거북 표현식의 구조와 일치하였다. 따라서 n 단계를 거북 표현식으로 나타내는 과정은 구조의 일반화를 포함한다고 볼 수 있다. 일부 복잡한 패턴에서는 거북 표현식을 직접 읽으면서 일반식을 구하는 경우도 있었다. 그러나 s8의 경우 닳은꼴 성장패턴에서 시행착오적으로 n 단계 거북 표현식을 구하였는데, 이렇게 구한 거북 표현식은 패턴과 단절된 것이므로 s8은 다시 수치적인 방법으로 일반식을 구할 수 밖에 없었다.

넷째, exPattern은 대수적으로 유의미한 패턴 일반화 과정을 매개하는 도구의 역할을 수행하였다. exPattern은 거북 표현식과 시각적 피드백을 통해 가추-귀납 단계의 순환에 의한 도형 패턴의 일반화 과정을 유도하는데, exPattern의 사용시간이 증가할수록 실제 실행을 하지 않고도 거북 표현식과 문제만 응시하면서 거북 표현식을 수정하고 완성해나가는 모습

이 나타났다. 즉, exPattern의 사용이 내면화 되면서 거북 은유를 사용하여 패턴을 분할하고 도형적 추론과 관계된 행동이 포함된 가추-귀납 단계의 반복을 통해 패턴의 규칙을 찾는 절차의 발달이 진행되었다고 볼 수 있다. 실제로 연구 1에서 수치적 접근의 재귀적 전략을 주로 사용하던 s5와 s9는 단계 사이의 변화 검색, 패턴 내 요소 사이의 대응 등 도형적 추론과 관계된 행동을 통해 패턴을 일반화하였으며, 귀납적 점점을 전혀 수행하지 않았던 s10은 exPattern에서는 반성적 과정을 통해 오류를 수정할 수 있었다.

다섯째, exPattern이 항상 학생과 긍정적으로 상호작용하는 것은 아니었다. s8은 닭은꼴 성장패턴에 대해서 1단계, 2단계, 3단계 중 일부를 거북 표현식으로 나타낸 후 거북 표현식의 외형을 기반으로 7단계와 n 단계 거북 표현식을 구하는 경험적 패턴 발견하기 활동에 빠졌다. 오히려 exPattern의 즉각적인 피드백은 시행착오적인 추측과 확인 과정을 빠르게 수행할 수 있도록 돕는 부정적인 역할을 하였다. s8은 다른 학생들과 달리 변수 n 에 대한 이해가 부족했고 거북 표현식의 학습 시간이 상대적으로 적었다는 점이 부정적인 상호작용의 원인으로 작용했을 가능성이 있다. 마이크로월드라는 교사를 대체하는 것이 아니라 수학화를 위한 새로운 상호작용을 만들어내는 도구이다(Healy & Kynigos, 2010). 교사는 마이크로월드 통합 수업에서 자동화된 시각적 피드백이 학생의 시행착오적 정답 발견하기 과정에 사용될 수 있음을 유의할 필요가 있다.

2. 결론 및 제언

지금까지 연구 1과 연구2의 주요 결과와 논의를 간략하게 제시하였다. 신경생리학적 자료를 바탕으로 패턴의 일반화 과정, 어려움 및 마이크로월드를 활용한 패턴 일반화의 학습에 관해 분석한 본 연구의 결과로부터 다음과 같이 몇 가지 결론과 패턴 활동에 대한 시사점, 후속연구를 위한 제언을 도출할 수 있었다.

첫째, 도형 패턴의 일반화는 다양한 형태의 행동을 통해 이루어지는 가추-귀납 단계의 순환 과정이라 할 수 있다. 본 연구는 신경과학의 측정 도구인 아이트래커를 이용하여 학생들의 일반화 과정을 안구 운동과 함께 분석함으로써 도형 패턴의 일반화가 가추-귀납 단계의 순환과정(Rivera, 2007, 2010a)으로 설명될 수 있음을 확인하였다. 학생들은 패턴과 관련된 행동을 시도하고 행동의 결과를 해석함으로써 패턴에 대한 규칙을 가추하고 귀납하였다. 일반화에 실패하는 학생들은 패턴에서 발견한 관계를 충분히 검증하지 않은 상태로 이용하거나 확장하는 경향이 있었다. 연구2의 참여자들은 귀납적 검증을 하지 않았기 때문에 오류를 발견하지 못하고 새로운 가추의 단계로 진입하지 못하였으며 일반화에 실패하였다. 이들은 연구 2에서 패턴과 연결된 상징적 표상의 조작과 시각적인 피드백을 통해 가추-귀납 단계의 순환을 유도하는 마이크로월드에서의 활동을 통해 성공적으로 일반화를 할 수 있게 되었다. 패턴을 일반화 하기 위해서는 귀납적 검증을 통해 오류를 발견하고 규칙을 수정하는 가추-귀납 단계의 순환이 필요하다. 몇 개의 사례를 통한 일반화는 추측과 검증을 통해 가장 그럴듯한 가설을 선택하는 과정이라 할 수 있다. 따라서 학생들이 패턴을 확장하거나 일반식을 구했을 때, 그것이 오류 가능성이 있는 추측임을 이해하고 제시된 사례를 이용하여 귀납적으로 검증할 수 있도록 패턴 활동을 설계할 필요가 있다. 또 이러한 측면에서 마이크로월드는 유용한 일반화 학습 지원 환경이 될 수 있다. 연구 2에서 볼 수 있듯이 마이크로월드는 지필 환경에 비해 학생들이 자신의 일

반화에 관한 추측을 실험하고 반성하게 하는 데 유리하고, 시각화를 통한 임의의 큰 단계의 검증도 지원하기 때문이다.

본 연구는 행위자 중심의 관점(Lobato, 2003)을 확장한 Ellis(2007)의 학생 중심의 관점에서 중학생이 도형 패턴을 일반화하기 위해 수행하는 구체적인 행동을 분류하고 분석하였다는 점에서 의의가 있다. 이때 행동은 기존의 연구에서 초점에 둔 ‘전략’과는 달리 일반화 과정에서 학생이 사용하는 도형적 조작이나 산술적 연산과 같은 수학적 조작이다. 학생들은 다양한 행동을 시도하고, 행동의 결과와 상호작용하면서 일반화를 수행해간다. 따라서 이러한 행동의 분류는 연구자나 교사에게 학생의 일반화 과정을 보다 구체적으로 분석할 수 있는 이론적 틀로 활용될 수 있다. 실제로 본 연구에서 분류한 행동을 바탕으로 학생들의 오류의 유형과 오류의 발생 원인을 효과적으로 분석할 수 있었는데, 예를 들어 많은 학생들이 패턴의 구조와 정확하게 연결되지 않은 7단계 타일의 수에 관한 식을 ‘식의 확장’을 통해 일반식으로 확장함으로써 오류를 범하였다.

문제의 유형과 개인의 사전 경험 및 지식에 따라 서로 다른 행동이 나타났는데, Rivera(2013)의 주장처럼 패턴 일반화는 인지적 사고와 행동의 상호작용에 의해 다양한 경로로 진행될 수 있는 복잡한 과정이라 할 수 있다. 그러나 그럼에도 불구하고 패턴의 공간적 분할, 단계 중심의 산술적 관계 검색, 단계 사이의 변화 검색과 같은 검색하기 범주에 속한 행동은 패턴의 구조를 파악하고 규칙을 가추하고 귀납하는 과정에서 필수적인 행동들이었다. 따라서 대수적 사고를 촉진할 수 있는 패턴 활동의 설계를 위해서는 패턴 일반화의 가추-귀납적 특성과 함께 핵심적인 행동들을 고려할 필요가 있으며 이와 관련된 교수·학습 설계 및 실행에 관한 후속연구가 진행될 필요가 있다.

한편, 본 연구는 사회적 측면을 배제한 채 중학교 3학년 중상위권 학생의 일반화를 위한 행동을 개인적 수준에서 분석했다는 제한점이 있다. 다른 수준의 학생이나, 교사와 학생이 상호작용하는 사회문화적 맥락의 수업 상황에서는 새로운 유형의 행동이 나타날 수 있을 것이다. 따라서

대상을 달리하는 후속연구를 통해 본 연구의 행동 분류 체계를 수정하고 보완한다면 학습자 중심에서 패턴 일반화 과정을 모델링할 수 있는 효과적인 이론적 틀로 발전할 수 있을 것으로 기대된다.

둘째, 도형 패턴의 일반화와 관련된 핵심적인 시각적 추론은 패턴을 대수적 표현과 연결될 수 있는 방식으로 분할하는 것과 일반화 과정에서 패턴에 대한 분할 기준을 일정하게 유지하는 능력이다. 학생들은 패턴을 분할한 뒤 분할 별로 다양한 행동을 시도하면서 규칙을 찾아갔다. 패턴이 적절하게 분할되어야만 학생들은 함수적 관계를 찾을 수 있었는데, 이는 패턴 일반화에 관한 초기 연구에서부터 여러 연구자들에 의해 강조된 ‘대수적으로 유용한 구조를 보는 눈’과 관련된 것이다. 그러나 본 연구에서의 결과는 패턴을 분할하는 능력만큼 패턴의 분할 기준을 일정하게 유지하는 능력도 중요하다는 것을 보여준다. 연구 1에서 많은 오류의 원인은 행동을 수행하고 행동의 결과를 해석하는 과정에서 패턴의 분할을 일관된 관점에서 비교하지 못하는 것에 기인했다. 패턴을 분할하는 기준을 일정하게 유지하지 못하는 학생은 일반화를 위한 행동이 정교하게 수행되지 못함으로써 관계 이해의 오류나 패턴의 구조를 산술적으로 표현하는 과정에서의 오류를 범하였다. 그러나 연구 2에서 학생들은 거북 표현식으로 패턴을 표현하는 과정에서 거북이의 제한된 이동방식에 따라 패턴을 일관된 관점에서 분할 할 수 있었으며, 분할에 대한 관점을 일정하게 유지함으로써 일반화를 보다 안정적으로 수행할 수 있었다.

따라서 펜으로 직접 패턴에 분할을 표시하는 것 또는 거북 표현식과 같은 구조적 표현으로 패턴을 나타내는 것과 같이 분할 상황을 외재적으로 표현하는 것은 학생들이 일반화를 안정적으로 수행하도록 지원하는 전략으로 지도될 수 있을 것이다.

셋째, 도형 패턴의 물리적 구조를 나타낼 수 있는 표현의 사용은 학습자로 하여금 자신의 생각을 의식화시키고 분석하게 함으로써 구조에 대한 일반화 활동을 지원할 수 있다. 연구 1에서는 4단계, 7단계, n 단계 그림이 외적 표현으로써 학생들의 일반화를 지원하였는데, 학생들은 분할 별로 패턴을 그려가며 규칙을 찾았고 자신이 그린 그림을 추가적인 사례

로써 일반식을 가추하고 귀납하는 데 사용하였다. 따라서 본 연구에서 사용한 “패턴을 그리고, 그림에 수치적 구조를 표시하고, 일반식을 구하는” 활동은 기존의 개수를 바로 묻는 활동에 비해 도형적 추론에 의한 일반화를 촉진한다고 볼 수 있다. 연구 2에서는 기호적 표현인 거북 표현식이 유사한 역할을 수행하였다. 그러나 거북 표현식은 정적인 그림과 달리 동적으로 조작가능한 기호로써 학생들의 패턴 일반화를 보다 강력하게 지원하였다. 먼저 거북 표현식은 행동문자로서 Logo와 같이 거북의 신체-동조적 이동을 통해 패턴을 생성한다. 이러한 거북 은유의 제약이 사용자로 하여금 패턴을 일정한 기준으로 분할하고 분할을 유지하는 데 도움을 주었다. 거북 표현식은 패턴의 구조와 수량적 측면을 함축적으로 표현하고 그것을 학습자 내부에서 실행하여 재생할 수 있는 특성을 갖고 있기 때문에 학생들은 거북 표현식에 대한 응시와 조작을 통해 자신의 일반화를 보다 정확하게 이해하고 수정할 수 있었다. 또한 거북 표현식은 학생들에게 일반화를 구성할 수 있는 방법을 제공할 뿐 아니라 연구자나 교사에게 학생의 생각을 읽을 수 있는 창으로서 역할을 하였다.

거북 표현식의 외적 실행에 의한 시각적 피드백은 반성적 귀납의 과정을 유도함으로써 거북 표현식과 함께 가추-귀납 단계의 순환을 매개하였다. 마이크로월드에서의 활동이 익숙해지고 내면화되고 거북 표현식의 내적 실행이 가능해지면서 학생들은 외적 실행 없이도 가추-귀납 단계의 반복을 통해 일반화를 할 수 있었다.

80년대 초 Logo 개발을 주도했던 MIT 공동체의 슬로건은 “아이들이 수학을 학습하게 하려고 노력하는 것을 그만두자. 아이들이 학습할만한 수학을 만들자” 였다(Noss & Hoyles, 1996, p. 4). 아리비아 숫자가 학습 내용을 변화시켰듯이 공학적 도구는 하나의 표현체계로서 학생이 할 수 있는 것과 표현할 수 있는 것을 재정의함으로써 수학 학습을 변화시킬 수 있다(Hoyles & Noss, 2008). 본 연구에서 설계한 exPattern은 패턴의 구조를 신체-동조적으로 구성할 수 있는 준형식적(semi-formal) 언어인 거북 표현식을 이용하여 지필 환경과는 다른 방식으로 패턴 일반화와 대수적 사고를 학습할 만한 수학으로 만들고자 시도한 소박한 결과물이라

할 수 있다. 표현체계의 형태나 조작 방식, 구체물과 표현체계의 연결 방식 등에 따라 마이크로월드는 학생들에게 대수적 사고의 다양한 측면을 새로운 형태로 경험하게 할 수 있다. 최근 터치, 모션 캡처, 아이 컨트롤(Eye Control) 등의 기술을 활용하는 새로운 신체적 표현체계를 이용한 공학적 도구와의 상호작용을 통해 학습자가 수학적 의미를 형성하는 과정에 관한 연구들도 수행되고 있다(e.g. Abrahamson, Shayan, Bakker, & Van Der Schaaf, 2015; Sinclair & Heyd-Metzuyanim, 2014). 학생들에게 학습할만한 대수를 제공할 수 있는 표현체계로서 마이크로월드의 설계에 관한 다양한 후속연구들이 수행되길 기대한다.

넷째, 안구 운동 자료는 학습자의 사고를 자세히 들여다 볼 수 있는 새로운 창이다. 본 연구에서는 안구 운동 자료의 분석을 통해 학생들의 일반화 과정을 자세히 살펴볼 수 있었고, 이를 토대로 선행 연구의 결과들에 대한 신경생리학적 증거들을 확인하고 기존의 연구를 확장할 수 있었다. 그러나 하나의 창으로 집안 내부를 완벽히 파악할 수 없듯이 학습자의 인지 과정을 정확히 추론하기 위해서는 다른 자료들과의 상호보완적 분석이 필요했다. 연구 1에서는 필기 내용과 회상자극면담을, 연구 2에서는 구조적 표현인 거북 표현식과 회상자극면담을 통해 안구 운동 분석의 정확도를 높일 수 있었다. 특히 시선 흐름 영상은 학생들이 자신의 일반화 과정을 정교하게 회상할 수 있도록 돕는 유용한 자극이었다. 이러한 안구 운동 자료와 다른 자료의 상호보완적 분석은 학생들의 수학적 학습 과정을 진단하고 처방하는 데에도 유용한 정보를 제공할 수 있을 것이다. 필기가 가능한 자극제시 시스템, 회상자극면담을 이용한 질적 분석 등을 사용한 본 연구는 수학교육에서 안구 운동 추적을 활용하는 초기 연구로서 가치가 있다. 또한 200만원대의 저가형으로 쉽게 접근할 수 있는 아이트래커를 이용하여 본 연구가 수행되었다는 점에서도 의미가 있다.

아직 대부분의 안구 운동 추적을 활용한 연구는 안구 운동 지표에 대한 양적 분석을 하는 것에 그치고 있다. 그러나 시간과 맥락 정보가 희석된 양적 지표들은 학습자의 사고 과정에 대한 구체적인 정보를 제공하

지 못한다는 한계가 있다. 본 연구에서는 안구 운동 자료를 통해 시각적 주의를 질적으로 분석함으로써 일반화 과정을 자세히 관찰할 수 있었다. 따라서 회상자극면담 등을 이용한 안구 운동 자료의 질적 분석을 다양한 영역에 적용한다면 학생들의 수학적 인지 과정에 대한 새로운 논의를 이끌어낼 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- 강현영 (2007). 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현: 도형 패턴을 중심으로. **학교수학**, 9(2), 313-326.
- 고성룡, 윤낙영 (2007). 우리 문장 읽기에서 안구 운동의 특성: 어절 길이, 단어 빈도 및 착지점 관련 효과. **인지과학**, 18(4), 325-350.
- 김경희, 김수진, 김미영, 김선희, 강민경, 박효희, 정송 (2009). **PISA 와 TIMSS 상위국과 우리나라의 교육과정 및 성취 특성 비교 분석**. 한국 교육과정평가원 연구보고 RRE, 7-2.
- 김남희 (1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. **수학교육학연구**, 7(1), 445-458.
- 김선희, 김경희 (2009). 교육과정에 근거한 TIMSS 2007 공개 추이문항의 정답률 분석. **수학교육학연구**, 19(1), 99-121.
- 김성준 (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **학교수학**, 5(3), 343-360.
- 김화경 (2006). ‘컴퓨터와 수학교육’ 학습-지도 환경에 관한 연구. **수학교육학연구**, 16(4), 367-386.
- 박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희, 임재훈, 유연주, 권석일, 김선희, 김재원, 박소현, 양수영, 이은영, 장미라, 장미선, 정주연, 주미, 최수연, 황지연 (2017). **중학교 수학1**. 서울: (주)동아출판.
- 백도현, 이정화 (2018). 수학적 모델링에서 가추적 사고의 역할과 의의. **수학교육학연구**, 28(2), 221-240.
- 황선욱, 강병개, 윤갑진, 이광연, 장홍월, 정종식 (2017). **중학교 수학1**. 서울: (주)미래엔.
- 신동훈, 최현동 (2013). 초등과학 교과서 삽화 이해 과정에서 나타나는 교사와 학생의 안구 운동의 차이. **생물교육**, 41(2), 198-210.
- 양은경, 신재홍 (2014). 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석. **수학교육학연구**, 24(1), 1-27.
- 유미경, 류성립 (2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른

- 일반화 방법 비교. **학교수학**, 15(2), 459-479.
- 이명기, 나귀수 (2012). 패턴의 유형에 따른 학생들의 일반화 방법 조사: 초등학교 6 학년 학생들을 중심으로. **학교수학**, 14(3), 357-375.
- 이미진, 이광호 (2015). 시선 추적기를 통해 본, 4학년 학생들의 방정식에 대한 관계적 사고 형성: 웹기반 저울을 중심으로. **학교수학**, 17(3), 391-405.
- 이슬, 장혜원 (2018). 시선추적 기법을 활용한 초등학생의 공간감각 관련 문제해결 과정 분석. **수학교육학연구**, 28(3), 283-299.
- 이종희, 이수연 (2013). 패턴 일반화 문제에 관한 초·중학교 수학 교과서 분석. **교과교육학연구**, 17(4), 1365-1384.
- 이종희, 김선희, 김부미, 김기연 (2017). **수학적 추론**. 교우.
- 이지운 (2015). 3D 입체 변별 과제에서 공간 인지 전략의 유형과 역할: 체화된 3D 거북 표현식과 전략을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문).
- 이지운, 조한혁, 송민호 (2013). 공간 시각화 과제에 체화된 거북 스킴 적용에 관한 연구. **A-수학교육**, 52(2), 191-201.
- 이춘길 (2004). **한글을 읽는 시선의 움직임**. 서울대학교 출판부.
- 장혜승 (2015). **중학교 2학년 상위권 학생들을 대상으로 식의 형태에 따른 패턴의 일반화 연구**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.
- 정홍춘, 이정화 (2008). 패턴에 기초한 대수 문제해결에서 나타나는 중학생들의 일반화 전략 및 표현. **교원교육**, 24(4), 219-236.
- 정혜림, 이승주, 조한혁 (2016). 연결큐브 수업을 위한 거북표현체계의 활용. **학교수학**, 18(2), 323-348.
- 조한혁 (2003) 컴퓨터와 수학교육. **A-수학교육**, 42(2), 177-191.
- 조한혁, 송민호 (2014). 실행식 (Executable expression) 기반 SMART 스트리텔링 수학교육. **수학교육학연구**, 24(2), 269-283.
- 지영명, 유연주 (2014). 매개변수개념의 의미충실한 사용에 관한 사례연구: 중학교 3 학년 한 교실을 대상으로. **학교수학**, 16(2), 355-386.
- 최병훈, 방정숙 (2012). 초등학교 4, 5, 6학년 영재학급 학생의 패턴 일반

- 화를 위한 해결 전략 비교. **수학교육학연구**, 22(4), 619-636.
- 최수미, 정영옥 (2010). 패턴의 일반화 과정에서 나타나는 수학적 정당화 수준 분석: 5 학년을 중심으로. **과학교육논총**, 23, 23-40.
- 최인용, 조한혁 (2016). 순열 조합 이해 과제에서의 안구 운동 추적 연구. **수학교육학연구**, 26(4), 635-662.
- 최인용, 조한혁 (2017). 큰 수의 법칙 시뮬레이션에서 중학생의 안구 운동 분석. **A-수학교육**, 56(3), 281-300.
- 최지영, 방정숙 (2014). 초등학교 6학년 학생들의 함수적 관계 인식 및 사고 과정 분석: 기하 패턴 탐구 상황에서의 사례연구. **수학교육학연구**, 24(2), 205-225.
- Abelson, H., & DiSessa, A. A. (1986). *Turtle geometry: The computer as a medium for exploring mathematics*. MIT press.
- Abrahamson, D., Shayan, S., Bakker, A., & Van Der Schaaf, M. (2015). Eye-tracking Piaget: Capturing the emergence of attentional anchors in the coordination of proportional motor action. *Human Development*, 58(4-5), 218-244.
- Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. *Future of learning group publication*, 5(3), 438.
- Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40(1), 111-129.
- Andrá, C., Lindström, P., Arzarello, F., Holmqvist, K., Robutti, O., & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye-tracking study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 237-259.
- Andrà, C., Arzarello, F., Ferrara, F., Holmqvist, K., Lindström, P., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). How students read mathematical representations: An eye tracking study. *In Proceedings of the 33rd*

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 49–56). PME Thessaloniki, Greece.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215–241.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). *The Australian curriculum: Mathematics*. Version 8.1. Sydney, NSW. ACARA. Australian
- Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57–70.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 121–128.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, No. 1, pp. 95–101).
- Bezuszka, S. J., & Kenney, M. J. (2008). The three R's: Recursive thinking, recursion, and recursive formulas. *Algebra and algebraic thinking in school mathematics*, 81–97.
- Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 107–126.
- Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. *Algebra and algebraic thinking in school mathematics. Reston: NCTM*, 279–293.
- Billings, E. M., Tiedt, T. L., & Slater, L. H. (2007). Algebraic thinking

- and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 302-308.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *International Group For The Psychology Of Mathematics Education*.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 412-446.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). **대수적 사고의 필수 이해**. 방정숙, 최지영, 이지영, 김정원 역. 교우.
- Bruyer, R., & Brysbaert, M. (2011). Combining speed and accuracy in cognitive psychology: Is the inverse efficiency score (IES) a better dependent variable than the mean reaction time (RT) and the percentage of errors (PE)?. *Psychologica Belgica*, 51(1), 5-13.
- Carpenter, P. A., & Shah, P. (1998). A model of the perceptual and conceptual processes in graph comprehension. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 4(2), 75.
- Chesney, D. L., McNeil, N. M., Brockmole, J. R., & Kelley, K. (2013). An eye for relations: eye-tracking indicates long-term negative effects of operational thinking on understanding of math equivalence. *Memory & cognition*, 41(7), 1079-1095.
- Chua, B. L., & Hoyles, C. (2010). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalising problem?. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 71-72.
- Chua, B. L., & Hoyles, C. (2014). Generalisation of Linear Figural Patterns in Secondary School Mathematics. *The Mathematics*

- Educator*, 15(2), 1-30.
- Cho, H. H., & Lee, J. Y. (2014). 3D turtle representation system and mental rotation using 3D turtle perspective. In *Proceedings of the 3rd International Constructionism Conference* (pp. 19-23).
- Cho, H. H., Lee, J. Y., & Song, M. H. (2012). Construction and design activities through Logo-based 3D microworld. In *Proceedings of the 2nd International Constructionism Conference* (pp. 21-25).
- Cho, H. H., Song, M. H., Lee, J. Y. & Kim, H. K. (2010) On the Design of Logo-based Educational Microworld Environment. In *Proceedings of the 1st International Constructionism Conference 2010 held at American University of Paris*, Paris, France; August 16-21, 2010.
- Cho, H. H., Jeong, J. H., Kim, J. J., Seo, Y. H., & Lee, S. J. (2016). Math-based Coding Education in Korean School. In *Proceedings of the 4th International Constructionism Conference* (pp. 169-173).
- Cifareli, V. (1999). Abductive inference: Connections between problem posing and solving. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (23rd, Haifa, Israel, July 25-30, 199)* (Vol. 1, pp. 646-653).
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2002). The role of technology in early childhood learning. *Teaching children mathematics*, 8(6), 340-343.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.
- Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Greenwood Publishing Group.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61-85). Springer, Dordrecht.
- Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and

- reflections. *ZDM*, 40(1), 143-160.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational studies in mathematics*, 50(3), 311-334.
- De Corte, E., Verschaffel, L., & Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology*, 82(2), 359.
- Dretske, F. (1990). Seeing, believing, and knowing. In *Visual cognition and action* (vol. 2) (pp. 129-148). MIT Press.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Springer, Dordrecht.
- Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. In *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 163-196). Springer, Boston, MA.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.
- Eco, U. (1983). Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction. *The Sign of Three: Dupin, Holmes, Peirce*, 198-220.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(2), 221-262.
- El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical*

- Education in Science and Technology*, 47(2), 197-215.
- English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education*. 고상숙, 고호경, 박만구, 이중권, 정인철, 황우형 역. 서울: 경문사.
- English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, 91(2), 166.
- Epelboim, J., & Suppes, P. (2001). A model of eye movements and visual working memory during problem solving in geometry. *Vision Research*, 41(12), 1561-1574.
- Friel, S. N., & Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *MatheMatics teaching in the Middle school*, 15(1), 24-33.
- Garcia-Cruz, J. A., & Martínón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 2-329).
- Gazzaley, A., & Nobre, A. C. (2012). Top-down modulation: bridging selective attention and working memory. *Trends in cognitive sciences*, 16(2), 129-135.
- Gegenfurtner, A., Lehtinen, E., & Säljö, R. (2011). Expertise differences in the comprehension of visualizations: A meta-analysis of eye-tracking research in professional domains. *Educational Psychology Review*, 23(4), 523-552.
- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics* (pp. 207-208). Oxford: Oxford University Press.
- Gonzalez, E. G., & Kolars, P. A. (1982). Mental manipulation of arithmetic symbols. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 8(4), 308.
- Grant, E. R., & Spivey, M. J. (2003). Eye movements and problem solving: Guiding attention guides thought. *Psychological Science*, 14(5), 462-466.
- Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic

- in advanced mathematics. *For the learning of mathematics*, 11(1), 38-42.
- Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L., & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. *Pattern in the teaching and learning of mathematics*, 67-83.
- Hayes, T. R., Petrov, A. A., & Sederberg, P. B. (2011). A novel method for analyzing sequential eye movements reveals strategic influence on Raven's Advanced Progressive Matrices. *Journal of Vision*, 11(10), 10-10.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers?. *Mathematical Thinking and learning*, 1(1), 59-84.
- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63-76.
- Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence*, 32(2), 175-191.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, 84(1), 76.
- Henderson, J. M., Brockmole, J. R., Castelano, M. S., & Mack, M. (2007). Visual saliency does not account for eye movements during visual search in real-world scenes. In *Eye movements* (pp. 537-III). Elsevier.
- Hoffmann, M. (1999). Problems with Peirce's concept of abduction. *Foundations of science*, 4(3), 271-305.
- Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & Van de Weijer, J. (2011). *Eye tracking: A comprehensive guide to*

- methods and measures*. OUP Oxford.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2008). Next steps in implementing Kaput' s research programme. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 85-97.
- Hoyles, C., Noss, R., & Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 309.
- Hyönä, J. (2010). The use of eye movements in the study of multimedia learning. *Learning and Instruction*, 20(2), 172-176.
- Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A., & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 171-178).
- James, W. (1890). Attention. *The principles of psychology*, 1, 402-458.
- Jeong, J. H., Cho, H. H., & Choi, I. Y. (2020). Incubator of Early Algebraic Thinking : Minimum Code Game in Microworld. Manuscript submitted for publication.
- Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 75-92.
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological review*, 87(4), 329.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145-168). Routledge.
- Kaput, J., Noss, R., & Hoyles, C. (2002). Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 63-88). Routledge.

- Kinach, B. M. (2014). Generalizing: The core of algebraic thinking. *MatheMatics teacher*, 107(6), 432-439.
- Kintsch, W. (1998). Comprehension: *A paradigm for cognition*.
- Krebs, A. S. (2003). Middle grades students' algebraic understanding in a reform curriculum. *School Science and Mathematics*, 103(5), 233-245.
- Krutetskii, V. A., WIRSZUP, I., & Kilpatrick, J. (1976). 수학적 능력의 심리학. 송상현, 임재훈, 권석일, 남진영, 정영옥, 서동엽, 김성준, 김지원 역. 경문사.
- Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: an international journal*, 3(3), 233-250.
- Kynigos, C., & Latsi, M. (2007). Turtle's Navigation and Manipulation of Geometrical Figures Constructed by Variable Processes in a 3d Simulated Space. *Informatics in education*, 6(2), 359-372.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). The metaphorical structure of the human conceptual system. *Cognitive science*, 4(2), 195-208.
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. *AMC*, 10(12), 720-733.
- Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342.
- Lannin, J. K. (2004). Using explicit and recursive reasoning. *Mathematics Teacher*, 98(4), 216-223.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, 7(3), 231-258.
- Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006a). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.
- Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006b). Recursive and

- explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 299-317.
- Lannin, J. K., Webb, M., Chval, K., Arbaugh, F., Hicks, S., Taylor, C., & Bruton, R. (2013). The development of beginning mathematics teacher pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 403-426.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Springer, Dordrecht.
- Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics teaching in the middle school*, 11(9), 428-433.
- Lee, L., & Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalisation and justification*. Concordia University, Montreal.
- Lee, W. K., & Wu, C. J. (2018). Eye movements in integrating geometric text and figure: Scanpaths and given-new effects. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 699-714.
- Lin, J. J., & Lin, S. S. (2014). Tracking eye movements when solving geometry problems with handwriting devices. *Journal of Eye Movement Research*, 7(1):2, 1-15
- Lobato, J. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and Vice Versa. *Educational researcher*, 32(1), 17-20.
- Lyle, J. (2003). Stimulated recall: A report on its use in naturalistic research. *British educational research journal*, 29(6), 861-878.
- Magnani, L. (2005). Abduction and cognition in human and logical agents. *We will show them: Essays in honour of Dov Gabbay*, 2, 225-258.

- Markworth, K. A. (2010). *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* (Doctoral dissertation, The University of North Carolina at Chapel Hill).
- Mariotti, A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. *Handbook of international research in mathematics education*, 695-723.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer, Dordrecht.
- Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Paul Chapman Educational Publishing.
- Mathematics in Context Development Team (2003). *Patterns and Symbol - Britannica Mathematics in Context*. Chicago: Encyclopedia Britannica Inc.
- Mavrikis, M., Noss, R., Hoyles, C., & Geraniou, E. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic affordances for an intelligent microworld. *Journal of Computer Assisted Learning*, 29(1), 68-84.
- Mayer, R. R. (1985). *Policy and program planning: A developmental perspective*. Prentice Hall.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.
- Mayer, R. E. (2010). Unique contributions of eye-tracking research to the study of learning with graphics. *Learning and instruction*, 20(2), 167-171.
- Metzger, W. (2006). *Laws of seeing*. Mit Press.
- Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441-465.

- Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In *Early algebraization* (pp. 277-301). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49.
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of.
- Neisser, U. (1976). *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
- Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, 33(2), 203-233.
- Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic' : a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM*, 41(4), 493-503.
- Obersteiner, A., & Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. *ZDM*, 48(3), 255-266.
- Ontario Ministry of Education. (2005). *The Ontario Curriculum Grades 1-8 Mathematics(Revised)*. Retrieved from <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf>
- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, 104-120.

- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc..
- Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, 3(2), 1-11.
- Parkhurst, D., Law, K., & Niebur, E. (2002). Modeling the role of salience in the allocation of overt visual attention. *Vision research*, 42(1), 107-123.
- Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, 7(3), 281-303.
- Peirce, C. S. (1931). *Collected papers of charles sanders peirce*. Harvard University Press.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (No. 246). Princeton university press.
- Posner, M. I. (1980). Orienting of attention. *Quarterly journal of experimental psychology*, 32(1), 3-25.
- Preissle, J., & Le Compte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Academic Press.
- Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In *Approaches to algebra* (pp. 107-111). Springer, Dordrecht.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 4(2), 37-62.

- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for research in Mathematics Education*, 507-530.
- Ratwani, R. M., Trafton, J. G., & Boehm-Davis, D. A. (2008). Thinking graphically: Connecting vision and cognition during graph comprehension. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 14(1), 36.
- Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological bulletin*, 124(3), 372.
- Rayner, K. (2009). Eye movements and attention in reading, scene perception, and visual search. *The quarterly journal of experimental psychology*, 62(8), 1457-1506.
- R Core Team (2019). R: A language and environment for statistical computing, version 3.6.1. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing; 2016.
- Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction. In *Proceedings of the CERME 3 international conference* (pp. 1-10).
- Resnik, M. D. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford University Press.
- Resnick, M., & Silverman, B. (2005). Some reflections on designing construction kits for kids. In *Proceedings of the 2005 conference on Interaction design and children* (pp. 117-122). ACM.
- Rivera, F. D. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *The Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.
- Rivera, F. D. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and

- complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 17-25.
- Rivera, F. D. (2010a). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 297-328.
- Rivera, F. D. (2010b). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88).
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues* (Vol. 49). Springer Science & Business Media.
- Rivera, F. D. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics. *New York, NY*.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Teacher to teacher: figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the middle school*, 11(4), 198-203.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 140-155.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40(1), 65-82.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic Reasoning through Patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), 212-221.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In *Early algebraization* (pp. 323-366). Springer, Berlin, Heidelberg.

- Rivera, F., Knott, L., & Evitts, T. A. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *The Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.
- Rodrigues, P., & Rosa, P. J. (2016). Eye-tracking as a research methodology in educational context: a spanning framework. In *Eye-tracking technology applications in educational research* (pp. 1-26). IGI Global.
- Roebuck, K. I. M. (2005). Coloring Formulas for Growing Patterns. *Mathematics Teacher*, 98(7), 472-475.
- Rothkopf, C. A., Ballard, D. H., & Hayhoe, M. M. (2007). Task and context determine where you look. *Journal of vision*, 7(14), 16-16.
- Sasman, M. C., Linchevski, L., & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. In *Proceedings of the 7th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (pp. 406-415).
- Samson, D. (2010). Enactivism and Figural Apprehension in the Context of Pattern Generalisation. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.
- Samson, D., & SCHÄFER, M. (2011). Enactivism, figural apprehension and knowledge objectification: An exploration of figural pattern generalisation. *For the learning of mathematics*, 31(1), 37-43.
- Savelsbergh, G. J., Williams, A. M., Kamp, J. V. D., & Ward, P. (2002). Visual search, anticipation and expertise in soccer goalkeepers. *Journal of sports sciences*, 20(3), 279-287.
- Schindler, M., & Lilienthal, A. J. (2019). Domain-specific interpretation of eye tracking data: towards a refined use of the eye-mind hypothesis for the field of geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 123-139.

- Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and instruction*, 13(2), 141-156.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive science and mathematics education*, 189, 215.
- Sinclair, N., & Heyd-Metzuyanim, E. (2014). Learning number with TouchCounts: The role of emotions and the body in mathematical communication. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(1-2), 81-99.
- Smith, M. S., Hillen, A. F., & Catania, C. L. (2007). Using pattern tasks to develop mathematical understandings and set classroom norms. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(1), 38.
- Snowden, R., Thompson, P., & Troscianko, T. (2012). 시각심리학의 기초. 오성주 역. 서울: 학지사.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM*, 40(1), 97-110.
- Steele, D. F., & Johanning, D. I. (2004). A schematic-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 65-90.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(4852), 611-616.
- Susac, A. N., Bubic, A., Kaponja, J., Planinic, M., & Palmovic, M. (2014). EYE MOVEMENTS REVEAL STUDENTS' STRATEGIES IN SIMPLE EQUATION SOLVING. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(3), 555-577.
- Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem

- situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 89-112.
- Thomas, L. E., & Lleras, A. (2007). Moving eyes and moving thought: On the spatial compatibility between eye movements and cognition. *Psychonomic bulletin & review*, 14(4), 663-668.
- Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. In New ideas in mathematics education: *Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251-256).
- Viviani, P. (1990). Eye movements in visual search: Cognitive, perceptual, and motor control aspects. *Eye movements and their role in visual and cognitive processes*, 353-383.
- Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185.
- Watson, A., & Mason, J. (2006). **색다른 학교 수학**. 이경화 역. 경문사.
- Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, 28(2), 223-243.
- Yarbus, A. L. (1967). *Eye movements and vision*. Springer.
- Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational studies in mathematics*, 43(2), 125-147.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation.

Educational studies in mathematics, 49(3), 379–402.

Zugal, S., & Pinggera, J. (2014). Low-cost eye-trackers: Useful for information systems research?. In *International Conference on Advanced Information Systems Engineering* (pp. 159–170). Springer, Cham.

부 록

부록 1: IRB 심의결과 통보서

심의결과 통보서

수신

책임연구자	이름: 최인웅	소속: 사범대학 수학교육학과	직위: 박사과정
지원기관	해당없음		

과제정보

승인번호	IRB No. 1904/003-007		
연구과제명	시각적 패턴 일반화 과제에서 중학생의 인지 과정 분석		
연구종류	학위 논문 연구, 면담(FGI 포함), 안구 운동 및 문제해결 과정 분석		
심의종류	재심의		
심의일자	2019-04-22		
심의대상	연구계획서(재심의), 연구참여자용 동의서 또는 동의서 면제 사유서, 재심의 답변서		
심의결과	승인		
승인일자	2019-04-22	승인유효기간	2020-04-21
정기보고주기	12개월		
심의의견	1. 심의결과 제출하신 연구계획에 대해 승인합니다. 2. 연구자께서는 승인된 문서를 사용하여 연구를 진행하시기 바라며, 만일 연구진행 과정에서 계획상에 변경사항 (연구자 변경, 연구내용 변경 등)이 발생할 경우 본 위원회에 변경 신청을 하여 승인 받은 후 연구를 진행하여 주십시오. 3. 유효기간 내 연구가 끝났을 경우 <u>종료 보고서를 제출하여야 하며</u> , 승인유효기간 이후에도 연구를 계속하고자 할 경우, <u>2020-03-22까지</u> 지속심의를 받도록 하여 주십시오.		
검토의견	계획서 검토 의견 동의서 검토 의견 기타 검토 의견		

2019년 04월 22일

서울대학교 생명윤리위원회 위원



Abstract

A Study on the Pattern Generalization Process through the Figural Pattern Learning Environment

-Focusing on Eye-tracking Analysis and
a Microworld-

Choi In Yong
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Generalization of figural patterns can be algebraically meaningful activities when using physical structures to obtain and justify algebraic expressions. However, it is not easy for students to find algebraically useful structures in patterns, and they tend to focus on the 'calculating and spotting patterns at the expense of expressing structure' activities, which convert patterns into sequences and then look for numerical rules. Most previous studies dealt with the type or right and wrong of solution strategy based on the student's generalization result, but relatively few studies focus on the generalization process itself.

Therefore, it is necessary to analyze in detail the student's generalizing process of figural patterns, and also to study the types and cause of difficulties and learning support in figural pattern tasks.

In this study, two studies on the generalization of figural patterns were conducted with third-grade middle school students.

The first study analyzed students' action, visual attention, and the types and causes of difficulties that they experience in the process of generalizing figural patterns. In the second study, a microworld based on turtle expression was designed based on the constructionism-based previous studies that attempted to support the learning of pattern generalization using microworld. By analyzing the student's interaction with the microworld, we explored the possibility of learning support using the microworld.

In order to analyze students' actions and interactions in detail in the generalization process, eye movement data and traditional data such as retrospective interview and handwriting were complementarily analyzed.

The first study identified ten actions students performed in the process of generalizing patterns through the spiral cycle of abduction-induction phase. The characteristics and roles of each action and the interactions between actions in the abduction-induction processes were analyzed. In particular, dividing patterns, searching for stage-driven arithmetic relation, searching for changes between stages, and relating between elements of pattern were identified as actions that play an important role in both the abduction and induction phases. Actions were closely interconnected and interacted, sometimes appearing simultaneously.

In the item drawing 4th stage of pattern, the transition between stage was relatively high. In the item asking 7th stage, the response time was the longest because most students tried to generalize functional

relationships. Students mainly referred to 1st stage for A, AB, ABB pattern and to 2nd or 3rd stage for similarly growing patterns. In the process of generalizing patterns, there was a continuous shift of visual attention between writing-AOI and stage-AOI.

The main causes of difficulties for students were inaccurate perception of the physical structure of pattern, the use of inconsistent pattern divisions, the absence of inclusion-exclusion principle scheme, the expansion of rule disconnected from the pattern, lack of conceptual understanding of variables, and the absence of inductive testing.

As a result of the second study, turtle metaphor helped to divide patterns and maintain a constant perspective on divisions, and turtle expression helped to carry out the generalization process stably by externalizing the abstract generalization process. Visual feedback of the microworld provided students with opportunity to reflect on their generalizations in an inductive way and to correct the rules in case of errors. As the activities at microworld were internalized, students were able to perform the abduction-induction process of generalization through manipulation and internal execution of turtle expressions without external execution. In other words, algebraically meaningful generalization process were mediated by the microworld. Three out of four students who had low level of pattern generalization in the first study could generalize figural patterns in meaningful way through classes with microworld. However, one student who lacked an understanding of the concept of variables and did not fully learn the turtles expression used a trial and error strategy in microworld.

From the two studies, it was confirmed that the generalization of figural pattern can be explained by the spiral cycle of abduction-induction processes which consist of various forms of actions. Taxonomy of actions for pattern generalizing can be used as a

theoretical framework for researchers and teachers to analyze the student's generalization process in detail. Designing pattern activities that promote algebraic thinking requires consideration of the abductive-inductive nature of the generalization process, as well as actions that play a key role in abduction and induction of explicit formula.

As important as the 'perception of algebraically useful structures' highlighted in previous studies on the generalization of figural patterns is the ability to maintain the criteria for dividing patterns in the generalization process. This is because the criteria for dividing pattern must be kept constant so that other actions being attempted for generalization can work significantly. In fact, many errors were caused by references to the wrong division. Use of expressions that can represent the physical structure of patterns supports figural generalization by allowing learners aware and analyze their thoughts.

In first study and second study, respectively, pictures and turtle expressions functioned as external expressions connected to students' internal generalization processes. Turtle expression, in particular, strongly supported pattern generalization as dynamic expressions for constructing structures. Various studies need to be conducted to provide students with learnable mathematics through the design of new representations and interactions.

Eye-tracking method is a new window into the learner's thinking. Scan-path video was a reliable stimulus to help learners recall precisely their generalizing processes. Complementary analysis of self-reported data such as retrospective interviews with eye movement data provided a detailed observation of the students' generalization processes. Applying this method of qualitative analysis of eye movement data to various domains in mathematics education research is expected to draw

new perspectives on students' mathematical cognition.

Keywords : algebra, figural pattern, generalization, turtle expression,
eye movement, microworld

Student Number : 2014-31198